UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

MIHAELA VERONICA PILCA

LUCRARE DE DIPLOMĂ

Conducător ştiinţific:
Prof. Dr. LIVIU ORNEA

Sesiunea de licenţă - Iunie 2005

LUCRARE DE DIPLOMĂ

MIHAELA VERONICA PILCA

GEOMETRIA SUPRAFEŢELOR
KÄHLER SLAB AUTODUALE

Conducător ştiinţific:
Prof. Dr. LIVIU ORNEA

Cuprins

Introducere

În această lucrare ne propunem să prezentăm studiul local al suprafeţelor Kähler slab autoduale, *i.e.* al căror tensor Weyl antiautodual este armonic. Clasificarea acestor suprafeţe a fost realizată de V. Apostolov, D. Calderbank şi P. Gauduchon în articolul [ACG03], în care este dată descrierea locală explicită a acestor metrici.

Suprafeţele Kähler slab autoduale pot fi privite ca o generalizare a suprafeţelor Kähler autoduale, care au fost discutate în lucrări recente. Ele apar ca un caz particular (pentru $n = 4$) al studiului realizat de R. Bryant în articolul [Br00] asupra varietăţilor Kähler Bochner-plate în orice dimensiune n, precum şi în lucrarea [AG02] scrisă de V. Apostolov şi P. Gauduchon, unde este stabilită o echivalenţă între suprafeţele Kähler autoduale şi metricile Einstein hermitiene autoduale şi este dată o descriere locală explicită a acestora din urmă.

În articolele citate mai sus s-a demonstrat că o suprafaţă Kähler autoduală este biextremală, iar acest fapt a fost extins pentru cadrul mai larg al suprafeţelor Kähler slab autoduale în [ACG03], pornind de la identitatea Matsumoto-Tanno (3.4) pentru astfel de suprafeţe. Pe de altă parte, spre deosebire de metricile Kähler autoduale, unde exemplele compacte sunt toate local simetrice, tot în [ACG03] s-a observat că în familia de metrici Kähler extremale a lui Calabi, pe prima suprafaţă Hirzebruch F_1 există o unică metrică slab autoduală până la omotetie.

Rezultatul principal al clasificării suprafeţelor Kähler slab autoduale este următorul:

Teorema 0.1. ([ACG03]) *Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler slab autoduală. Atunci (g, J) este o metrică Kähler biextremală, în sensul că atât curbura scalară cât şi pfaffianul formei Ricci normalizate sunt aplicaţii moment care comută Poisson pentru câmpurile Killing K_1 şi respectiv K_2. Mai mult, pe fiecare componentă conexă a lui M este adevărată una dintre următoarele afirmaţii:*

(i) *K_1 şi K_2 sunt liniar independente pe o mulţime deschisă densă. Atunci (g, J, ω) are forma locală explicită dată de* (6.30)-(6.35)*, depinzând de un polinom arbitrar de grad* 4 *şi de o constantă arbitrară care este zero dacă şi numai dacă g este autoduală,* cf. *Teorema* 6.2.

(ii) *K_1 nu se anulează pe o mulţime deschisă densă, dar $K_1 \wedge K_2$ este identic nul. Atunci (g, J, ω) este local de coomogenitate* 1 *şi este dată explicit de construcţia Calabi,* cf. *Teorema* 6.4.

(iii) *K_1 şi K_2 se anulează peste tot. Atunci g are curbura Ricci paralelă, deci este fie Kähler-Einstein, fie produs de două suprafeţe Riemann de curburi constante.*

Dacă suprafaţa (M, g, J, ω) *este compactă şi conexă, atunci aparţine cazului* (ii) *sau* (iii)*, iar în cazul* (ii) (M, g, J, ω) *este izomorfă cu prima suprafaţă Hirzebruch* F_1*, dotată cu metrica extremală Calabi slab autoduală,* cf. *Teorema* 5 *din* [ACG03].

Un aspect important al abordării suprafeţelor Kähler slab autoduale este studiul lor într-un cadru mai larg. Identitatea Matsumoto-Tanno pentru suprafeţe slab autoduale este echivalentă cu faptul că partea primitivă a formei Ricci, ρ_0, satisface o ecuaţie diferenţială liniară. Pe mulţimea deschisă unde ρ_0 nu se anulează, ecuaţia înseamnă că ρ_0 defineşte o structură hermitiană $((|\rho_0|/\sqrt{2})^{-2}g, I)$ conformă Kähler cu metrica dată g şi care induce orientarea opusă lui J. Multe din proprietăţile suprafeţelor Kähler slab autoduale sunt consecinţe ale faptului că ρ este o 2-formă închisă J -invariantă, a cărei parte primitivă satisface această ecuaţie. În particular, în Teorema 4.1, se arată că doi dintre invarianţii algebrici (urma şi pfaffianul) ai oricărei astfel de 2-forme φ sunt aplicaţii moment pentru câmpuri Killing hamiltoniene. De aceea se studiază în general teoria suprafeţelor Kähler cu astfel de 2-forme, numite hamiltoniene, care le includ ca un caz particular pe cele slab autoduale. Menţionăm că o parte din aceste rezultate au fost generalizate în [ACG03] în cazul varietăţilor aproape Kähler 4-dimensionale (M, g, J, ω), care au tensorul Ricci J-invariant, obţinându-se noi contraexemple necompacte de varietăţi strict aproape Kähler (care sunt autoduale Ricci plate) la conjectura încă deschisă a lui Goldberg[1], care afirmă că o metrică Einstein aproape Kähler pe o varietate compactă trebuie să fie Kähler.

În ceea ce priveşte organizarea lucrării, într-o primă secţiune introductivă am considerat importantă prezentarea pe scurt a paşilor urmaţi în realizarea clasificării suprafeţelor Kähler slab autoduale, ceea ce poate da o privire de ansamblu asupra acesteia. A doua secţiune cuprinde notaţiile şi convenţiile folosite, precum şi câteva rezultate de bază care sunt necesare în demonstraţii.

Secţiunile următoare cuprind prezentarea propriu-zisă a clasificării. Într-o primă parte dăm definiţia suprafeţelor Kähler slab autoduale şi prin condiţii echivalente ajungem în mod natural la considerarea noţiunii de 2-formă hamiltoniană. Astfel, în secţiunea următoare studiem proprietăţile suprafeţelor care admit o 2-formă hamiltoniană. După aceea, valorificăm aceste rezultate generale în cazul particular al suprafeţelor Kähler slab autoduale, despre care arătăm că sunt biextremale şi ajungem la o primă clasificare a acestor suprafeţe, dată de Teorema 5.1.

[1]Conjectura lui Goldberg a fost confirmată în cazul curburii scalare pozitive de K. Sekigawa în articolul *On some compact Einstein almost Kähler manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **39** (1987), 677-684.

În secţiunea 6 prezentăm descrierea locală explicită a suprafeţelor Kähler slab autoduale. Primul caz este cel în care câmpurile vectoriale Killing hamiltoniene, a căror existenţă este asigurată de structura biextremală, sunt liniar independente, ceea ce înseamnă că structura Kähler (g, J, ω) este torică. Teorema 6.1 caracterizează clasa structurilor Kähler torice care apar în acest fel din 2-forme hamiltoniene. În timp ce suprafeţele Kähler torice depind, în general, de o funcţie arbitrară de două variabile ([Ab98],[Gui94]), suprafeţele torice provenind din 2-forme hamiltoniene, numite „ortotorice" ([ACG03]), au o formă explicită dată de Propoziţia 6.2, depinzând de două funcţii arbitrare, de o variabilă. Acest fapt are marele avantaj că ecuaţiile diferenţiale provenind din condiţiile impuse curburii sunt ecuaţii ordinare. În particular, obţinem explicit toate structurile Kähler torice extremale care provin din 2-forme hamiltoniene, incluzând exemple noi de metrici Kähler care sunt conforme Einstein, dar nu sunt nici autoduale, nici antiautoduale, precum şi metrici Kähler-Einstein explicite. Metricile Kähler slab autoduale din această familie sunt clasificate în Teorema 6.2. Al doilea caz, în care câmpurile vectoriale Killing hamiltoniene sunt liniar dependente, dar nu ambele zero, este legat de construcţia lui Calabi de metrici Kähler pe fibraţi în drepte peste suprafeţe riemanniene ([Cal82]). În Teorema 6.4 se obţine clasificarea metricilor extremale Calabi slab autoduale: o familie cu patru parametri, dintre care una este global definită pe prima suprafaţă Hirzebruch, F_1.

În cele două anexe ale lucrării prezentăm descompunerea tensorului de curbură şi metricile Kähler extremale introduse de Calabi în [Cal82], pentru a justifica definiţia dată în secţiunea 5.

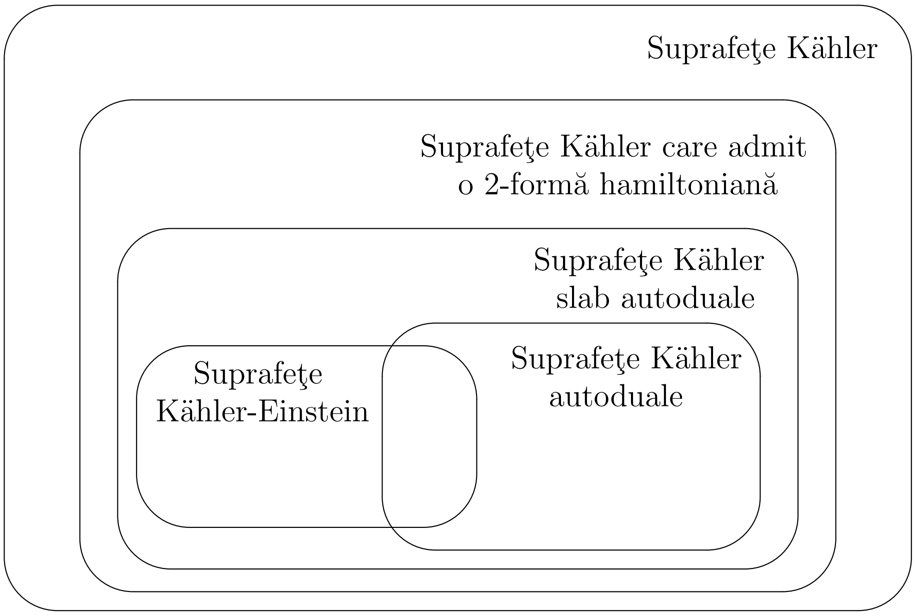
1. O privire de ansamblu asupra clasificării suprafeţelor Kähler slab autoduale

În această primă secţiune prezentăm pe scurt paşii importanţi ai clasificării suprafeţelor Kähler slab autoduale cu scopul de a da o perspectivă de ansamblu asupra conţinutului lucrării.

O suprafaţă Kähler este slab autoduală dacă tensorul său Weyl antiautodual este armonic (*cf.* Definiţia 3.2).

Posibile încadrări ale suprafeţelor Kähler slab autoduale în studiul general al suprafeţelor Kähler sunt următoarele:

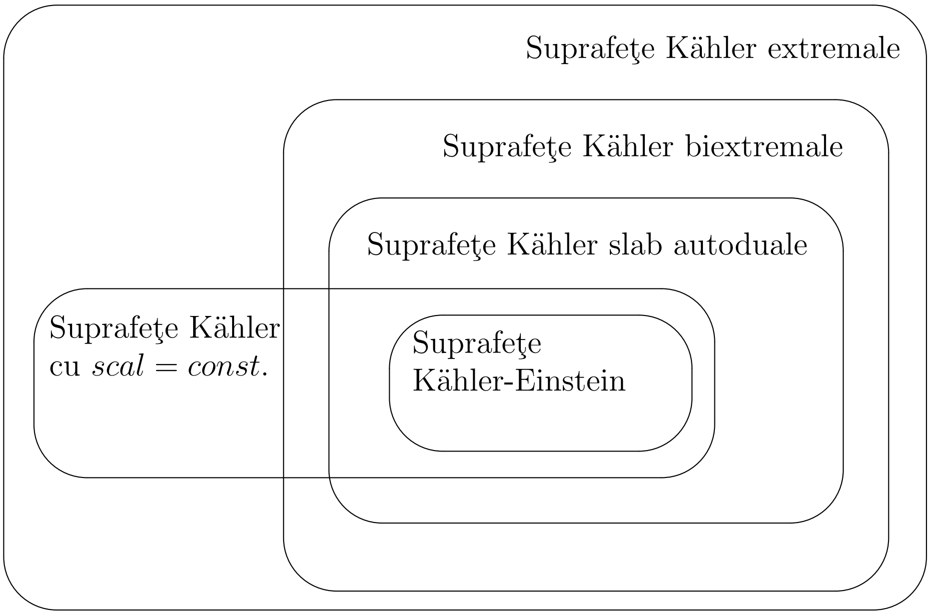
1) Suprafeţele Kähler slab autoduale sunt o generalizare atât a suprafeţelor Kähler autoduale (caracterizate de faptul că tensorul Weyl antiautodual este nul) cât şi a suprafeţelor Kähler-Einstein[2]. Pe de altă parte, va rezulta că suprafeţele Kähler slab autoduale sunt incluse într-o clasă mai mare şi anume aceea a suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană.[3] Aceste legături între suprafeţe sunt prezentate mai sugestiv în diagrama următoare:



[2]Faptul că orice suprafaţă Kähler-Einstein este slab autoduală este o consecinţă directă a Corolarului 3.1, deoarece din condiţia Einstein rezultă că forma Ricci este paralelă şi curbura scalară este constantă, deci, este satisfăcută ecuaţia Matsumoto-Tanno (3.4). Deoarece pe o suprafaţă Kähler condiţia Einstein este prea „restrictivă”, în sensul că există puţine suprafeţe Kähler care sunt Einstein, este important să considerăm generalizări ale acestor suprafeţe şi o astfel de generalizare este dată de suprafeţele Kähler slab autoduale.

[3]2-formele hamiltoniene sunt introduse în secţiunea 4 (*cf.* Definiţia 4.2). Conform Propoziţiei 4.2 o suprafaţă Kähler este slab autoduală dacă şi numai dacă partea fără urmă a formei Ricci este 2-formă twistor, sau, echivalent, forma Ricci este 2-formă hamiltoniană.

2) Suprafeţele Kähler slab autoduale sunt un caz particular al suprafeţelor Kähler biextremale (caracterizate de faptul că atât curbura scalară cât şi pfaffianul formei Ricci normalizate sunt potenţiale de olomorfie, *cf.* Definiţia 5.1), care, la rândul lor, sunt un caz particular al suprafeţelor Kähler extremale[4] (cele a căror curbură scalară este potenţial de olomorfie). Aceste incluziuni sunt prezentate în diagrama următoare[5]:



În continuare prezentăm paşii principali ai clasificării suprafeţelor Kähler slab autoduale, care sunt parcurşi în detaliu în secţiunile următoare[6].

I. Stabilirea de caracterizări echivalente ale suprafeţelor Kähler slab autoduale, cu scopul de a găsi o caracterizare ce poate fi mai uşor utilizată pentru clasificarea acestor suprafeţe.

Prin definiţie, o suprafaţă Kähler este slab autoduală dacă şi numai dacă tensorul Weyl antiautodual este armonic:

$$\delta W^- = 0.$$

Această condiţie este echivalentă cu fiecare dintre următoarele[7]:

[4]Acest fapt împreună cu forma locală pe care o găsim pentru suprafeţele Kähler slab autoduale ne permite să dăm exemple explicite de metrici extremale care nu au curbura scalară constantă (*cf.* Observaţia 6.5).

[5]În această diagramă suprafeţele care sunt la intersecţia dintre cele de curbură scalară constantă şi cele slab autoduale au proprietatea că tensorul lor Ricci este paralel (aceasta rezultă din ecuaţia Matsumoto-Tanno (3.4)).

[6]Vom folosi în cele ce urmează noţiuni şi notaţii care vor fi definite şi explicate în cadrul secţiunilor în care sunt introduse.

[7]Aceste echivalenţe sunt demonstrate în Secţiunile 3 şi 4.

- Tensorul Cotton-York este autodual: $C^- = 0$;
- Partea fără urmă a formei Ricci, ρ_0, satisface ecuaţia Matsumoto-Tanno:
$$\nabla_X \rho_0 = -\frac{1}{2} ds\,(X)\,\omega + \frac{1}{2}\,(ds \wedge JX - Jds \wedge X)\,;$$
- ρ_0 este 2-formă twistor;
- Pe mulţimea $M_0 := \{x \in M \mid \rho_0(x) \neq 0\}$ structura hermitiană $(\lambda^{-2} g, I)$ este Kähler, unde $\rho_0 = \lambda \omega_I$;
- ρ este 2-formă hamiltoniană.

II. Studiul proprietăţilor unei suprafeţe Kähler care admite o 2-formă hamiltoniană.

Fie φ o 2-formă hamiltoniană, adică φ este J-invariantă, închisă şi φ_0 este 2-formă twistor (*cf.* Definiţia 4.2), căreia îi asociem 2-forma normalizată $\tilde{\varphi}$:
$$\varphi = \varphi_0 + \frac{3}{2}\sigma\omega \;\rightsquigarrow\; \tilde{\varphi} = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\omega,$$
care are urma $\mathrm{tr}(\tilde{\varphi}) = \sigma$ şi pfaffianul $\pi := \mathrm{pf}(\tilde{\varphi}) = \frac{\sigma^2}{4} - \lambda^2$, unde $\lambda = \frac{|\varphi_0|}{\sqrt{2}}$. Au loc următoarele proprietăţi importante:

(a) Urma σ şi pfaffianul π sunt potenţiale de olomorfie care comută Poisson (*cf.* Teorema 4.1).

Rezultă astfel existenţa a două câmpuri Killing hamiltoniene:
$$K_1 = J\,\mathrm{grad}\,\sigma, \quad K_2 = J\,\mathrm{grad}\,\pi,$$
care comută: $[K_1, K_2] = 0$ şi sunt ortogonale faţă de forma Kähler ω: $\omega(K_1, K_2) = 0$. În general, aceste câmpuri Killing nu sunt neapărat nenule sau independente. Deoarece $K_1^{1,0}$ si $K_2^{1,0}$ sunt câmpuri olomorfe, identificăm pe fiecare componentă conexă a varietăţii următoarele 3 posibilităţi (*Cf.* Corolarul 4.1):

(1) $K_1 \wedge K_2$ este nenulă pe o mulţime deschisă densă;
(2) $K_1 \wedge K_2$ se anulează identic, dar K_1 este nenul pe o mulţime deschisă densă;
(3) K_1 şi K_2 se anulează identic.

În al treilea caz, 2-forma hamiltoniană φ nu conţine, în general, multă informaţie despre geometria varietăţii (ar putea fi un multiplu constant al formei Kähler), iar în primele două cazuri vom obţine o clasificare explicită la pasul IV, respectiv VI.

(b) Notând $\sigma = \xi + \eta$ şi $\pi = \xi\eta$, atunci pe fiecare componentă conexă a varietăţii pe care φ_0 nu se anulează identic, $d\xi$ şi $d\eta$ sunt ortogonale (*cf.* Teorema 4.2).

III. Particularizarea rezultatelor obţinute la pasul II pentru suprafeţele Kähler slab autoduale, pentru care forma Ricci este 2-formă hamiltoniană:

$$\rho = \rho_0 + \frac{3}{2}s\omega \;\rightsquigarrow\; \tilde{\rho} = \frac{1}{2}\rho_0 + \frac{1}{4}s\omega,$$

unde s este curbura scalară normalizată: $s = \frac{scal}{6}$.

Din proprietatea (a) rezultă că $s = \mathrm{tr}(\tilde{\rho})$ şi $p := \mathrm{pf}(\tilde{\rho})$ sunt potenţiale de olomorfie, adică suprafaţa Kähler slab autoduală este biextremală (*cf.* Definiţia 5.1).

Pe baza proprietăţilor deja obţinute pentru suprafeţele Kähler slab autoduale, se poate da o primă clasificare a acestora (*cf.* Teorema 5.1):

Pe fiecare componentă conexă a suprafeţei Kähler slab autoduale (M, g, J, ω) are loc una dintre următoarele situaţii:

(1) $\rho_0 = 0$: (g, J) este Kähler -Einstein;
(2) $\rho_0 \neq 0$, $s = const.$: (g, J) este local produsul Kähler a două suprafeţe Riemann de curburi constante;
(3) $s \neq const.$ şi g este autoduală ($W^- = 0$);
(4) W^- şi ρ_0 nu se anulează nicăieri: metrica Kähler $(\bar{g} = \lambda^{-2}g, I)$ dată de Propoziţia 4.1 este extremală şi global definită pe M.

IV. Clasificarea locală a suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană în cazul în care câmpurile Killing asociate, K_1 şi K_2, sunt liniar independente.

- Descrierea locală explicită a unei suprafeţe Kähler ortotorice[8] (M, g, J, ω) (*cf.* Propoziţia 6.2), dată de formulele (6.1)-(6.4), care depind de două funcţii arbitrare de o variabilă (F şi G):

$$g = (\xi - \eta)\left(\frac{d\xi^2}{F(\xi)} - \frac{d\eta^2}{G(\eta)}\right) + \frac{1}{\xi - \eta}\left(F(\xi)(dt + \eta dz)^2 - G(\eta)(dt + \xi dz)^2\right),$$

$$Jd\xi = \frac{F(\xi)}{\xi - \eta}(dt + \eta dz), \qquad Jdt = -\frac{\xi d\xi}{F(\xi)} - \frac{\eta d\eta}{G(\eta)},$$

$$Jd\eta = \frac{G(\eta)}{\eta - \xi}(dt + \xi dz), \qquad Jdz = \frac{d\xi}{F(\xi)} + \frac{d\eta}{G(\eta)},$$

$$\omega = d\xi \wedge (dt + \eta dz) + d\eta \wedge (dt + \xi dz).$$

- Stabilirea următoarei echivalenţe pentru suprafeţele Kähler (*cf.* Teorema 6.1):

(M, g, J, ω) este ortotorică $\Longleftrightarrow$ admite o 2-formă hamiltoniană ale cărei câmpuri Killing asociate sunt independente,

[8] O suprafaţă Kähler este ortotorică dacă admite 2 câmpuri Killing hamiltoniene ale căror aplicaţii moment $\xi\eta$ şi $\xi + \eta$ comută Poisson şi $d\xi \perp d\eta$ (*cf.* Definiţia 6.2).

de unde rezultă că acestea din urmă sunt descrise local tot de formulele (6.1)-(6.4).

V. Folosind rezultatele de la pasul IV se obţine clasificarea locală a suprafeţelor Kähler slab autoduale în cazul în care curbura scalară, s, şi pfaffianul formei Ricci normalizate, p, sunt independente.

Calculăm curbura scalară a unei suprafeţe Kähler ortotorice utilizând forma locală explicită a acestora obţinută la pasul anterior şi cu ajutorul formulei obţinute pentru s stabilim următoarele echivalenţe[9] pentru o suprafaţă Kähler ortotorică M:

- M este extremală $\Longleftrightarrow$ F şi G sunt de forma:
$$F(x) = kx^4 + lx^3 + Ax^2 + B_1x + C_1,$$
$$G(x) = kx^4 + lx^3 + Ax^2 + B_2x + C_2.$$

- M e slab autoduală $\Leftrightarrow$ M e biextremală $\Leftrightarrow$ F şi G ca mai sus şi $B_1 = B_2$,

obţinând în acest fel descrierea locală a unei suprafeţe Kähler slab autoduale, pentru care s şi p sunt liniar independente.

VI. Clasificarea locală a suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană, în cazul în care câmpurile Killing asociate, K_1 şi K_2, sunt liniar dependente şi K_1 nu este identic nul.

- Descrierea locală explicită a unei suprafeţe Kähler de tip Calabi[10] (*cf.* Propoziţia 6.6), dată de formulele (6.40)-(6.41), care depind de o metrică arbitrară g_Σ pe o suprafaţă Riemann, de o funcţie strict pozitivă arbitrară w şi de două constante reale a, b:
$$g = (az - b)g_\Sigma + w(z)dz^2 + w(z)^{-1}(dt + \alpha)^2,$$
$$\omega = (az - b)\omega_\Sigma + dz \wedge (dt + \alpha).$$
- Stabilirea următoarei echivalenţe pentru suprafeţele Kähler (*cf.* Teorema 6.3):
O suprafaţă Kähler este de tip Calabi dacă şi numai dacă:
  (i) este local produsul Kähler a două suprafeţe Riemann, dintre care una admite un câmp vectorial Killing (pentru $a = 0$); sau

---

[9] Păstrăm notaţiile de la pasul IV, astfel încât F şi G sunt funcţiile de o variabilă care descriu local structura Kähler. Prima echivalenţă este stabilită în Propoziţia 6.4, iar cea de-a doua în Propoziţia 6.5.

[10] O suprafaţă Kähler (M, g, J, ω) este de tip Calabi dacă admite un câmp Killing hamiltonian K care nu se anulează nicăieri, astfel încât perechea aproape hermitiană (g, I), unde $I = J$ pe $\langle K, JK\rangle$ şi $I = -J$ pe $\langle K, JK\rangle^\perp$, este conformă Kähler (*cf.* Definiţia 6.2).

(ii) admite o 2-formă hamiltoniană ale cărei câmpuri Killing asociate sunt dependente, dar nu ambele nule (pentru $a = 1$ şi $b = 0$).

Rezultă astfel, că o suprafaţă Kähler care admite o 2-formă hamiltoniană ale cărei câmpuri Killing asociate sunt dependente, dar nu ambele identic nule, este descrisă local tot de formulele (6.40)-(6.41), unde $a = 1$ şi $b = 0$.

VII. Folosind rezultatele obţinute la pasul IV se obţine clasificarea locală a suprafeţelor Kähler slab autoduale în cazul în care s şi p sunt dependente şi s nu este constantă.

Calculăm curbura scalară a unei suprafeţe Kähler de tip Calabi, care nu este local produs Kähler de suprafeţe Riemann, utilizând forma locală explicită a acestora obţinută la pasul anterior şi cu ajutorul formulei obţinute pentru s stabilim următoarele echivalenţe[11] pentru o suprafaţă Kähler de tip Calabi (M, g, J, ω), al cărei câmp Killing este K şi care nu este local produs Kähler de suprafeţe Riemann:

- s e aplicaţie moment pentru un multiplu al câmpului K $\Leftrightarrow$ g_Σ are curbura scalară constantă k şi V este de forma: $V(z) = A_1 z^4 + A_2 z^3 + k z^2 + A_3 z + A_4$.
- M e slab autoduală $\Leftrightarrow$ M e biextremală $\Leftrightarrow$ g_Σ şi V ca mai sus şi $A_3 = 0$,

obţinând în acest fel descrierea locală a unei suprafeţe Kähler slab autoduale, pentru care s şi p sunt liniar dependente şi s nu este constantă.

Astfel se obţine clasificarea suprafeţelor Kähler slab autoduale în cele 3 cazuri identificate pentru câmpurile Killing asociate 2-formei hamiltoniene ρ:

(1) K_1, K_2 liniar independente (pasul V);
(2) K_1, K_2 liniar dependente şi K_1 nu este identic nul (pasul VII);
(3) K_1 şi K_2 sunt identic nule: în acest caz existenţa unei 2-forme hamiltoniene arbitrare, ale cărei câmpuri Killing asociate sunt K_1 şi K_2, nu aduce multă informaţie despre geometria suprafeţei, dar, pentru forma Ricci, rezultă[12] că tensorul Ricci este paralel, deci (M, g, J, ω) este fie Kähler-Einstein, fie local un produs Kähler de suprafeţe Riemann.

[11] Păstrăm notaţiile de la pasul VI, astfel încât g_Σ este o metrică pe o suprafaţă Riemann şi $V(z) := \frac{z}{w(z)}$ o funcţie strict pozitivă, care descriu local structura Kähler. Aceste echivalenţe sunt stabilite în Propoziţia 6.7.

[12] Anularea câmpului vectorial $K_1 := J \operatorname{grad} s$ înseamnă că s este constantă şi din ecuaţia Matsumoto-Tanno (3.4) rezultă că forma ρ_0 este paralelă, deci şi forma Ricci, $\rho = \rho_0 + \frac{3}{2} s\omega$, este paralelă.

Clasificarea descrisă mai sus a suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană şi modul în care se particularizează formulele ce dau descrierea locală a structurii Kähler în cazul suprafeţelor Kähler slab autoduale pot fi prezentate schematic astfel:

$K_1 = 0$ $K_2 = 0$	$K_1 \wedge K_2 = 0$, $K_1 \neq 0$ -Suprafeţe Kähler de tip Calabi, care nu sunt produse Kähler -Structura Kähler e dată de o metrică g_Σ pe o suprafaţă Riemann şi o funcţie $V > 0$	$K_1 \wedge K_2 \neq 0$ -Suprafeţe Kähler ortotorice -Structura Kähler e dată de două funcţii arbitrare F şi G
Ric-paralel	V- polinom de grad ≤ 4 cu coeficientul termenului pătratic egal cu k=curbura constantă a metricii g_Σ	F,G-polinoame de grad ≤ 4 cu $F - G = const.$
	Suprafeţe Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană	Suprafeţe Kähler slab autoduale

2. Preliminarii şi convenţii

Această secţiune cuprinde prezentarea convenţiilor şi notaţiilor folosite, precum şi câteva rezultate utile în demonstraţiile din cadrul clasificării suprafeţelor Kähler slab autoduale[13]. Deoarece putem considera că varietăţile Kähler[14] se află la intersecţia dintre geometria riemanniană, complexă şi simplectică, am încercat să grupăm noţiunile şi proprietăţile lor de care avem nevoie din cadrul acestor trei geometrii.

(A) Începem prin prezentarea succintă a noţiunilor din geometria riemanniană pe care le vom utiliza în cadrul acestei lucrări. În continuare notăm cu (M, g) o varietate riemanniană.[15]

Notăm metrica punctuală cu g sau $\langle \cdot, \cdot \rangle$, iar în cazul în care M este varietate compactă orientată, $(\cdot, \cdot)$ va reprezenta produsul scalar total dat de integrarea pe varietate: $(\cdot, \cdot) := \int_M \langle \cdot, \cdot \rangle \, vol_g$, unde vol_g este forma volum.

Pornind de la fibratul vectorial tangent notat TM, considerăm fibraţii asociaţi: fibratul cotangent T^*M, fibraţii tensoriali de tip (p, q): $T^{p,q}M$, $\forall p, q \geq 0$, fibratul k-formelor: $\Lambda^k M$ şi spaţiile corespunzătoare de secţiuni: $\mathcal{X}(M)$ este mulţimea câmpurilor vectoriale, $\mathcal{T}^{p,q}M$ mulţimea tensorilor de tip (p, q), $\Omega^k M$ mulţimea k-formelor diferenţiale.

Metrica g ne permite să identificăm, în fiecare punct x, spaţiul tangent T_xM cu spaţiul cotangent T_x^*M prin următorul izomorfism canonic:

$$T_xM \to T_x^*M, \quad v \mapsto g_x(v, \cdot).$$

Rezultă astfel că pe o varietate riemanniană (M, g) avem o identificare canonică între câmpurile vectoriale şi câmpurile de covectori sau 1-forme. Mai general, metrica g induce următoarele izomorfisme canonice[16] între $T^{p,q}V = \bigotimes^p V^* \otimes \bigotimes^q V$ şi $T^{p+1,q-1}V = \bigotimes^{p+1} V^* \otimes \bigotimes^{q-1} V$:

$$\flat \colon T^{p,q}V \to T^{p+1,q-1}V$$

$$v_1^* \otimes \cdots \otimes v_p^* \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_q \mapsto v_1^* \otimes \cdots \otimes v_p^* \otimes g(v_1, \cdot) \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q,$$

cu inversa notată: $\sharp \colon T^{p+1,q-1}V \to T^{p,q}V$. Rezultă astfel o identificare canonică între câmpurile tensoriale de tip (p, q) şi cele de tip (r, s) pentru $p + q = r + s$. În particular, pentru orice câmp vectorial X vom

[13] Majoritatea rezultatelor din această secţiune sunt numai enunţate, iar demonstraţiile lor se pot găsi, de exemplu, în [Be87].

[14] Aceste varietăţi au fost introduse de Erich Kähler în articolul [K33].

[15] Reamintim că orice varietate diferenţiabilă poate fi înzestrată cu o metrică riemanniană prin lipirea metricilor definite local, cu ajutorul unei partiţii a unităţii subordonate acoperirii respective.

[16] Aceste izomorfisme sunt cunoscute sub numele de bemol ($\flat$) şi respectiv diez ($\sharp$), deoarece în notaţia clasică tensorială corespund scăderii, respectiv ridicării indicilor.

nota cu $X^\flat$ 1-forma asociată, iar pentru orice 1-formă α vom nota cu $\alpha^\sharp$ câmpul vectorial asociat[17].

Metrica riemanniană g, care este definită pe fibratul tangent, induce o metrică pe fiecare dintre fibraţii vectoriali asociaţi. Compunând izomorfismul dintre $T^{p,q}M$ şi $T^{q,p}M$ cu aplicaţia de evaluare[18] obţinem o formă pătratică nedegenerată şi pozitiv definită, notată tot g_x, pe spaţiul tensorial $T^{p,q}_xM$ în fiecare punct x, deci şi pe orice subspaţiu al său, în particular pe spaţiul formelor Λ^p_xM. În cele ce urmează vom folosi această metrică indusă pe fibraţii tensoriali, dar în cazul formelor diferenţiale vom considera următoarea convenţie diferită[19] pentru definirea metricii g pe Λ^pM:

$$g(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p) := \det(\langle \alpha_i, \beta_j \rangle).$$

Produsul scalar astfel definit este egal[20] cu cel tensorial înmulţit cu $\frac{1}{p!}$.

Reamintim că pe orice varietate diferenţiabilă n-dimensională M este definită diferenţiala exterioară $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ prin formula:

$$\begin{aligned} d\psi(X_0, X_1, \ldots, X_k) &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j X_j(\psi(X_0, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \psi([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k). \end{aligned}$$

Formula ciclică pentru diferenţiala exterioară are, datorită convenţiilor pe care le-am adoptat, următoarea formă:

$$d\alpha(X_0, \ldots, X_k) = \Sigma_{cicl.} (\nabla_{X_0} \alpha)(X_1, \ldots, X_k), \tag{2.1}$$

pentru orice k-formă α, unde sumarea se face după toate permutările ciclice ale indicilor $\{0, \ldots, k\}$.

Adjunctul formal al diferenţialei exterioare d faţă de g este codiferenţiala, notată $\delta\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, pentru orice $k = \overline{1, n}$. Operatorii d şi δ se pot exprima în funcţie de conexiunea Levi-Civita, notată ∇, astfel:

$$d = \sum_{i=1}^{n} e_i \wedge \nabla_{e_i}, \quad \delta = -\sum_{i=1}^{n} e_i \lrcorner \nabla_{e_i}, \tag{2.2}$$

---

[17] Ţinând cont de aceste identificări, vom omite indicii $\flat$ şi $\sharp$, înţelegând, de exemplu, prin produsul exterior dintre un câmp X şi o formă α, produsul exterior dintre $X^\flat$ şi α.

[18] Aplicaţia de evaluare, cunoscută şi sub numele de „pairing", este funcţia naturală care „împerechează" un spaţiu vectorial cu dualul său: $eval\colon V \times V^* \to \mathbb{R}$, $eval((v, \alpha)) := \alpha(v)$.

[19] Folosind această convenţie pentru produsul scalar pe spaţiul Λ^pV (V este un spaţiu vectorial n-dimensional), rezultă că o bază ortonormată a lui Λ^pV este dată de $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}_{i_1 < \cdots < i_p}$, unde $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază ortonormată a lui V.

[20] Această incoerenţă este dată de convenţia pe care o alegem pentru produsul exterior şi anume: $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)(X_1, \cdots, X_p) := \det(\alpha_i(X_j))$.

unde $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază ortonormată locală de câmpuri vectoriale, iar cu $X\lrcorner$ am notat produsul interior cu un câmp vectorial X.

O formulă importantă care face legătura între derivata exterioară, produsul interior şi derivata Lie de-a lungul unui câmp de vectori este *formula lui Cartan*:

$$\mathcal{L}_X\alpha = X\lrcorner d\alpha + d(X\lrcorner\alpha), \tag{2.3}$$

pentru orice câmp vectorial X şi orice formă $\alpha \in \Omega^*(M)$.

Pentru o funcţie reală diferenţiabilă f definită pe M considerăm:
-*Gradientul* lui f = câmpul vectorial notat $\operatorname{grad} f$ definit astfel:

$$g(\operatorname{grad} f, X) = df(X) = X(f), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

-*Hessiana* lui f = forma biliniară simetrică $\operatorname{Hess}(f) := \nabla(df)$.

Operatorul *Laplace* acţionând pe orice funcţie f din $\mathcal{C}^\infty(M)$ este dat de formula[21]:

$$\Delta f := -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Echivalent, operatorul Laplace este dat de formulele:

$$\Delta f = -tr(\operatorname{Hess}(f)) = \delta df,$$

şi se extinde pe pe spaţiul k-formelor astfel:

$$\Delta\colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(M), \quad \Delta := \delta d + d\delta.$$

Un rol important în cadrul clasificării suprafeţelor Kähler slab autoduale va fi jucat de câmpurile Killing, care dau gradul de simetrie al unei varietăţi riemanniene. Prin definiţie, un *câmp Killing* este o izometrie infinitezimală, *i.e.* un câmp vectorial al cărui flux este format din izometrii.

Propozitia 2.1. *Fie X un câmp vectorial pe o varietate riemanniană (M, g). Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*
(1) *X este câmp Killing;*
(2) *$\mathcal{L}_X g = 0$;*
(3) *∇X este antisimetric faţă de g:*

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathcal{X}(M);$$

(4) *$X(g(Y,Z)) = g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Z])$, $\forall Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.*

Corolarul 2.1. *O combinaţie liniară a două câmpuri Killing este câmp Killing dacă şi numai dacă coeficienţii combinaţiei sunt funcţii constante.*

---

[21]Notăm cu $\operatorname{div}(X)$ divergenţa câmpului vectorial X:

$$\operatorname{div}(X) := \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i),$$

unde $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază locală ortonormată.

Demonstraţie. Fie K_1 şi K_2 două câmpuri Killing şi α_1, α_2 două funcţii astfel încât $K := \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2$ este tot câmp Killing. Folosind a doua caracterizare dată de Propoziţia 2.1, rezultă că pentru orice două câmpuri vectoriale X şi Y are loc:

$$\begin{aligned} 0 = (\mathcal{L}_K g)(X,Y) &= g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K) \\ &= X(\alpha_1)g(K_1,Y) + X(\alpha_2)g(K_2,Y) + Y(\alpha_2)g(X,K_2) \\ &+ Y(\alpha_1)g(X,K_1) + \alpha_1 \left(\mathcal{L}_{K_1} g\right)(X,Y) + \alpha_2 \left(\mathcal{L}_{K_2} g\right)(X,Y), \end{aligned}$$

unde ultimii doi termeni sunt identic nuli, deoarece K_1 şi K_2 sunt câmpuri Killing. Particularizând convenabil în această formulă câmpurile vectoriale X şi Y rezultă: $X(\alpha_1) = X(\alpha_2) = 0$, pentru orice câmp vectorial X, deci funcţiile α_1 şi α_2 sunt constante. □

În continuare prezentăm definiţiile şi convenţiile de semn pe care le vom utiliza pentru diferitele tipuri de curbură:
Curbura riemanniană sau *tensorul de curbură* văzut ca $(1,3)$-tensor:

$$R(X,Y)Z := \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z. \tag{2.4}$$

sau ca tensor de tip $(0,4)$: $R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V)$.
Curbura Ricci este urma aplicaţiei $Z \mapsto R(X,Z)Y$, deci este tensorul simetric de tip $(0,2)$ dat de formula:

$$Ric(X,Y) := \sum_{i=1}^{n} R(X,e_i,Y,e_i). \tag{2.5}$$

Curbura scalară este urma tensorului Ricci:

$$scal := tr(Ric) = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i,e_i), \tag{2.6}$$

unde $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază locală ortonormată. În cadrul lucrării va fi mai convenabil să folosim curbura scalară normalizată, pe care o notăm s şi care este: $s = \frac{scal}{(n-1)(n-2)}$.

Partea fără urmă a tensorului Ricci este notată Ric_0 şi este dată de formula: $Ric_0 = Ric - \frac{scal}{n} g$.

Există unele relaţii care leagă între ele diferitele noţiuni de curbură introduse, dintre care cea mai importantă şi pe care o vom utiliza este *identitatea Bianchi contractată*:

$$\operatorname{div}(Ric) = \frac{1}{2} d\, scal. \tag{2.7}$$

Definiţia 2.1. Fie (M,g) o varietate riemanniană n-dimensională orientată cu forma volum vol_g. Pentru fiecare p cu $0 \leq p \leq n$ *operatorul Hodge* $*$ este unicul izomorfism de fibrări vectoriale:

$$*\colon \Lambda^p T^* M \to \Lambda^{n-p} T^* M$$

astfel încât $\alpha \wedge (*\beta) = g(\alpha,\beta) vol_g$,
pentru orice α şi β din $\Lambda^p_x T^* M$, în fiecare punct x al lui M.

Propozitia 2.2. *Operatorul Hodge $*$ are următoarele proprietăţi:*

(1) $*1 = vol_g$, $*vol_g = 1$;
(2) $g(\alpha, *\beta) = (-1)^{p(n-p)} g(*\alpha, \beta)$, $\forall \alpha \in \Lambda^p T^* M$, $\forall \beta \in \Lambda^{n-p} T^* M$;
(3) *Pe* $\Lambda^p T^* M$ *are loc:* $*^2 = (-1)^{p(n-p)} Id_{\Lambda^p T^* M}$;
(4) $*(X \lrcorner \alpha) = (-1)^{p-1} X \wedge *\alpha$;
$*(X \wedge \alpha) = (-1)^p X \lrcorner * \alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda^p T^* M$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$.

Folosind operatorul Hodge $*$ are loc:

$$\delta\alpha = -(-1)^{n(p+1)} * d * \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^p(M),$$

de unde rezultă următoarea expresie pentru operatorul Laplace:

$$\Delta f = - * d * df.$$

(B) În continuare prezentăm câteva noţiuni de geometrie complexă, care ne vor fi utile.

Reamintim că o varietate complexă M se defineşte analog unei varietăţi diferenţiabile reale, cerând ca local M să fie homeomorfă cu deschişi din $\mathbb{C}^m$ şi înlocuind condiţia ca funcţiile de trecere să fie diferenţiabile cu aceea ca aceste funcţii să fie olomorfe. Rezultă din definiţie că orice varietate complexă de dimensiune (complexă) m este în particular varietate diferenţiabilă de dimensiune reală $2m$.

Folosind înmulţirea cu i din $\mathbb{C}^m$ se poate defini[22] un endomorfism al fibratului tangent TM, notat J, cu proprietatea: $J^2 = -Id_{TM}$. Un astfel de endomorfism antiinvolutiv al lui TM se numeşte *structură aproape complexă*, iar o varietate M care admite un astfel de J se numeşte *varietate aproape complexă*.

Dacă (M, J) este o varietate aproape complexă, considerăm complexificatul spaţiului tangent: $TM^{\mathbb{C}} := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ şi extindem toate endomorfismele şi operatorii diferenţiali reali prin $\mathbb{C}$-liniaritate. Notăm cu $T^{1,0}M$ şi $T^{0,1}M$ subspaţiile proprii ale endomorfismului J corespunzătoare valorilor proprii i şi respectiv $-i$, care sunt descrise astfel:

$$T^{1,0}M = \{X - iJX \,|\, X \in TM\}, \quad T^{0,1}M = \{X + iJX \,|\, X \in TM\},$$

iar $TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$. În mod analog considerăm complexificarea fibratului exterior: $\Lambda^*_{\mathbb{C}} M := \Lambda^* M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ şi descompunerea lui $\Lambda^1_{\mathbb{C}} M$:

$$\Lambda^{1,0}M := \{\xi \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} M \,|\, \xi(Z) = 0, \ \forall Z \in T^{0,1}M\}$$

$$\Lambda^{0,1}M := \{\xi \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} M \,|\, \xi(Z) = 0, \ \forall Z \in T^{1,0}M\},$$

iar secţiunile se numesc forme de tip $(1,0)$ şi respectiv $(0,1)$.

---

[22] J se defineşte mai întâi local pe fiecare deschis homeomorf cu un deschis din $\mathbb{C}^m$ şi apoi se verifică că se „lipeşte" bine pe intersecţii, folosind faptul că funcţiile de trecere sunt olomorfe.

Am văzut că orice varietate complexă este în mod natural o varietate aproape complexă. Următoarea propoziţie[23] stabileşte în ce condiţii are loc şi reciproca:

Propozitia 2.3. *Fie (M, J) o varietate aproape complexă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *J provine dintr-o structură complexă;*
(2) *Tensorul Nijenhuis, definit de $N^J(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]$, este identic nul;*
(3) *Distribuţia $T^{1,0}$ sau $T^{0,1}$ este integrabilă;*
(4) $d\left(\mathcal{C}^\infty\left(\Lambda^{1,0}M\right)\right) \subset \mathcal{C}^\infty\left(\Lambda^{2,0}M \oplus \Lambda^{1,1}M\right)$;
(5) $d\left(\mathcal{C}^\infty\left(\Lambda^{p,q}M\right)\right) \subset \mathcal{C}^\infty\left(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M\right), \forall p,q \geq 0.$

Folosind (5) rezultă că, pentru fiecare perche (p, q) fixată, se pot defini operatorii diferenţiali:

$$\partial\colon \mathcal{C}^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to \mathcal{C}^\infty(\Lambda^{p+1,q}M), \quad \bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to \mathcal{C}^\infty(\Lambda^{p,q+1}M),$$

astfel încât $d = \partial + \bar{\partial}$. Aceşti operatori verifică relaţiile:

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

De multe ori este convenabil să considerăm o altă pereche de operatori şi anume d şi d^c, unde $d^c := i(\bar{\partial} - \partial)$, care au avantajul de a fi operatori reali. Echivalent, operatorul d^c poate fi definit acţionând pe k-forme astfel: $d^c := (-1)^k JdJ$. În particular, pentru orice funcţie f are loc: $d^c f = Jdf$.

Pe o varietate complexă (M, J) un rol important este jucat de obiectele olomorfe. Pentru funcţiile olomorfe propoziţia următoare ne dă câteva caracterizări echivalente.

Propozitia 2.4. *Fie $f\colon M \to \mathbb{C}$ o funcţie diferenţiabilă pe varietatea complexă M. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *f este funcţie olomorfă;*
(2) *$Z(f) = 0$, $\forall Z \in T^{0,1}M$;*
(3) *df este o formă de tip $(1, 0)$.*

Definiţia 2.2. Un câmp vectorial $Z \in \mathcal{C}^\infty(T^{1,0}M)$ se numeşte *olomorf* dacă $Z(f)$ este olomorfă pentru orice funcţie olomorfă local definită f.

Definiţia 2.3. Un câmp vectorial X se numeşte *real analitic* (sau *real olomorf*) dacă păstrează structura complexă J: $\mathcal{L}_X J = 0$.

Propozitia 2.5. *Fie X un câmp vectorial real pe o varietate complexă (M, J). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *X este real olomorf;*
(2) *$X - iJX$ este olomorf;*
(3) *Fluxul lui X este format din transformări olomorfe ale lui M.*

[23] Echivalenţa dintre (1) şi (3) este cunoscută sub numele de Teorema Newlander-Nirenberg.

Structura aproape complexă J se extinde prin $\mathbb{C}$-liniaritate la $TM^{\mathbb{C}}$ şi induce un operator complex, notat la fel, pe fibratul cotangent T^*M definit astfel încât acţiunea lui J să fie compatibilă cu identificarea dată de metrică: $(J\alpha)(X) := -\alpha(JX)$, $\alpha \in T^*M$, $X \in TM$. Acţiunea lui J se extinde şi pe spaţiul formelor astfel:

$$(J\alpha)(X_1, \cdots, X_p) := (-1)^p \alpha(JX_1, \cdots, JX_p).$$

Definiţia 2.4. O p-formă α se numeşte *J-invariantă* dacă $J(\alpha) = \alpha$ şi *J-antiinvariantă* dacă $J(\alpha) = -\alpha$.

Astfel, o 2-formă α e J-invariantă dacă şi numai dacă $\alpha(JX, JY) = \alpha(X, Y)$, pentru orice câmpuri vectoriale X, Y şi J-antiinvariantă dacă şi numai dacă $\alpha(JX, JY) = -\alpha(X, Y)$.

Definiţia 2.5. Pe o varietate aproape hermitiană (M, g, J), cu forma fundamentală $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$, definim următorii operatori algebrici reali[24]:

$$L \colon \Lambda^k M \to \Lambda^{k+2} M, \quad L(\alpha) := \omega \wedge \alpha = \frac{1}{2} \sum_i e_i \wedge Je_i \wedge \alpha,$$

$$\Lambda \colon \Lambda^{k+2} M \to \Lambda^k M, \quad \Lambda(\alpha) := \frac{1}{2} \sum_i Je_i \lrcorner e_i \lrcorner \alpha,$$

unde sumarea se face după o bază ortonormată $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

Definiţia 2.6. O formă φ se numeşte *primitivă* dacă $\Lambda\varphi = 0$.

În particular, dacă φ este o 2-formă, atunci este primitivă dacă şi numai dacă este fără urmă, deoarece, prin definiţie, urma unei 2-forme este produsul scalar cu ω: $tr(\varphi) := \langle \varphi, \omega \rangle = \Lambda\varphi$.

(C) Vom mai avea nevoie şi de câteva noţiuni din geometria simplectică[25].

Definiţia 2.7. Pe o varietate simplectică (M, ω), un câmp vectorial X se numeşte *simplectic* sau *local hamiltonian* dacă păstrează forma simplectică ω (*i.e.* $\mathcal{L}_X \omega = 0$), sau, echivalent, $X \lrcorner \omega$ este închisă şi se numeşte *hamiltonian* cu *funcţia hamiltoniană*[26] $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ dacă $X \lrcorner \omega = dh$.

---

[24] Aceşti operatori sunt extinşi pe forme complexe prin $\mathbb{C}$-liniaritate şi joacă un rol important mai ales în cadrul geometriei Kähler, unde ω este închisă.

[25] Reamintim că (M, ω) se numeşte *varietate simplectică* dacă ω este o 2-formă închisă şi nedegenerată.

[26] Datorită faptului că forma simplectică ω este nedegenerată, rezultă, că pentru orice funcţie h, există un unic câmp vectorial, notat X_h astfel încât $X_h \lrcorner \omega = dh$.

Definiţia 2.8. Fie (M, ω) o varietate simplectică, G un grup Lie cu algebra Lie $\mathfrak{g}$ şi $\mathfrak{g}^*$ dualul spaţiului vectorial $\mathfrak{g}$. O acţiune simplectică[27] $\psi\colon G \to Simplect(M, \omega)$ se numeşte *hamiltoniană* dacă există o aplicaţie:

$$\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$$

care satisface condiţiile:
1. Pentru orice $X \in \mathfrak{g}$, dacă $\mu^X\colon M \to \mathbb{R}$, $\mu^X(p) := \mu(p)(X)$ este componenta lui μ de-a lungul lui X şi X^* este câmpul fundamental asociat lui X, adică câmpul vectorial generat de subgrupul cu un parametru $\{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq G$, atunci:

$$d\mu^X = X^* \lrcorner \omega,$$

adică μ^X este funcţia hamiltoniană a câmpului vectorial X^*.
2. μ este echivariantă faţă de acţiunea dată a lui G pe M şi faţă de acţiunea coadjunctă Ad^* a lui G pe $\mathfrak{g}^*$:

$$\mu \circ \psi_g = Ad^*_g \circ \mu, \quad \forall g \in G.$$

Atunci (M, ω, G, μ) se numeşte *G-spaţiu hamiltonian*, iar μ se numeşte *aplicaţie moment*.

Observăm că aplicaţia moment este o generalizare a funcţiei hamiltoniene, deoarece în cazul $G = \mathbb{R}$, acţiunile simplectice ale lui G pe M sunt în corespondenţă cu câmpurile vectoriale simplectice complete pe M, iar o acţiune ψ a lui $\mathbb{R}$ este hamiltoniană dacă şi numai dacă există o funcţie $h\colon M \to \mathbb{R}$ astfel încât $dh = X \lrcorner \omega$, unde X este câmpul vectorial pe M generat de ψ.

Definiţia 2.9. *Paranteza Poisson* a două funcţii $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ este definită astfel:

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g).$$

Rezultă că are loc: $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$ şi că paranteza Poisson satisface identitatea Jacobi, deoarece aceasta se reduce la identitatea Jacobi pentru croşet. Astfel, mulţimea $\mathcal{C}^\infty(M)$ înzestrată cu paranteza Poisson este o algebră Poisson (adică o algebră Lie care satisface în plus regula lui Leibniz: $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$) şi există următorul antiautomorfism de algebre Lie:

$$\mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M), \quad h \mapsto X_h, \quad \{\cdot, \cdot\} \mapsto -[\cdot, \cdot].$$

(D) Considerăm acum (M, g, J, ω) o varietate Kähler.

Definiţia 2.10. O metrică hermitiană g pe o varietate complexă (M, J) se numeşte *metrică Kähler* dacă forma fundamentală $\omega(\cdot, \cdot) := g(J\cdot, \cdot)$ este închisă.

[27] Notăm cu $Simplect(M, \omega)$ grupul format din transformările simplectice ale varietăţii (M, ω), adică acele difeomorfisme φ ale lui M care invariază forma simplectică ω: $\varphi^*\omega = \omega$.

Datorită convenţiei pe care am adoptat-o pentru produsul scalar definit pe spaţiul p-formelor, rezultă că pătratul normei formei Kähler este dat de : $|\omega|^2 = \langle\omega,\omega\rangle = m$, în timp ce pătratul normei tensoriale este: $|g|^2 = 2m$.

Definiţia 2.11. O funcţie reală f pe o varietate Kähler (M, g, J, ω) se numeşte *potenţial (real) de olomorfie* dacă gradientul său este un câmp vectorial real olomorf (*i.e.* $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}\, f} J = 0$).

Lema 2.1. *Fie* (M, g, J, ω) *o varietate Kähler şi* f *o funcţie diferenţiabilă pe* M*. Atunci:*

$\mathrm{grad}\, f$ *este câmp vectorial*	$\Longleftrightarrow$	$J\,\mathrm{grad}\, f$ *este câmp vectorial*
real olomorf		*Killing (în raport cu* g*).*

Demonstraţie. Folosind formula lui Cartan (2.3) şi faptul că ω este închisă, rezultă:

$$\mathcal{L}_{J\,\mathrm{grad}\, f}\omega = (J\,\mathrm{grad}\, f)\lrcorner d\omega + d((J\,\mathrm{grad}\, f)\lrcorner\omega) = -d(df) = 0,$$

deci $J\,\mathrm{grad}\, f$ păstrează forma fundamentală ω, deci este real olomorf ($\mathcal{L}_{J\,\mathrm{grad}\, f} J = 0$) dacă şi numai dacă este Killing ($\mathcal{L}_{J\,\mathrm{grad}\, f} g = 0$).
Necesitatea: Dacă grad f este câmp real olomorf, rezultă din Propoziţia 2.5, (1)$\leftrightarrow$(2), că şi $J\,\mathrm{grad}\, f$ este olomorf, deci $J\,\mathrm{grad}\, f$ este Killing în raport cu g.
Suficienţa: Dacă $J\,\mathrm{grad}\, f$ este Killing, rezultă că este real olomorf, deci şi $\mathrm{grad}\, f = -J(J\,\mathrm{grad}\, f)$ este real olomorf. □

Pe o varietate complexă am văzut că există mai mulţi operatori de diferenţiere: d cu adjunctul δ, d^c al cărui adjunct îl notăm δ^c, ∂ şi $\bar\partial$ astfel încât $d = \partial + \bar\partial$, cu operatorii adjuncţi notaţi ∂^* şi respectiv $\bar\partial^*$, astfel încât $\delta = \partial^* + \bar\partial^*$. Corespunzător se pot introduce mai mulţi operatori Laplace:

$$\Delta = d\delta + \delta d, \quad \Delta^c = d^c\delta^c + \delta^c d^c,$$
$$\Delta^\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial, \quad \Delta^{\bar\partial} = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial.$$

În cazul particular al varietăţilor Kähler aceşti operatori sunt în esenţă aceeaşi, având loc egalităţile:

$$\Delta = \Delta^c = 2\Delta^\partial = 2\Delta^{\bar\partial}.$$

În plus, pe o varietate Kähler au loc *identităţile Kähler*:

$$[\Lambda, d^c] = \delta, \quad [\Lambda, d] = -\delta^c,$$

de unde rezultă următoarea formulă pentru operatorul Laplace pe o varietate Kähler, pentru orice funcţie f:

$$\Delta f = \Delta^c f = -\langle dd^c f, \omega\rangle. \tag{2.8}$$

În încheierea acestor preliminarii prezentăm doi tensori definiţi pe orice varietate riemanniană (M, g), de care avem nevoie în cadrul clasificării suprafeţelor Kähler slab autoduale. Este vorba de tensorul Cotton-York şi tensorul Bach, care sunt ambii conform invarianţi.

Definiţia 2.12. *Tensorul Cotton-York*[28] al unei varietăţi riemanniene (M, g) este tensorul de tip $(0, 3)$ definit astfel:

$$C_{Y,Z}(X) = -(\nabla_Y h)(Z, X) + (\nabla_Z h)(Y, X),$$

unde h este tensorul Ricci normalizat, dat de formula:

$$h = \frac{1}{2} Ric_0 + \frac{1}{24} scal\, g,$$

care apare în descompunerea tensorului de curbură: $R = h \owedge g + W$ (*cf.* (A.5), pentru $n = 4$).

Definiţia 2.13. *Tensorul Bach*[29] al unei varietăţi riemanniene n-dimensionale (M, g) este tensorul de tip $(0, 2)$ definit astfel:

$$B_{X,Y} = \sum_{i=1}^{n} (-(\nabla_{e_i} C)_{e_i,X}(Y) + \langle W_{e_i,X} h(e_i), Y \rangle),$$

unde C este tensorul Cotton-York, h este tensorul Ricci normalizat şi sumarea se face după o bază ortonormată $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

Observaţia 2.1. Tensorul Bach este un invariant conform, iar pentru $n = 4$ are loc: $B^{f^{-2}g} = f^2 B^g$ şi B se poate exprima în funcţie de tensorul Weyl autodual, W^+, sau de tensorul Weyl antiautodual, W^-, astfel:

$$\begin{aligned} B_{X,Y} &= 2 \sum_{i=1}^{n} (-(\nabla_{e_i} C^+)_{e_i,X}(Y) + \langle W^+_{e_i,X} h(e_i), Y \rangle) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n} (-(\nabla_{e_i} C^-)_{e_i,X}(Y) + \langle W^-_{e_i,X} h(e_i), Y \rangle). \end{aligned} \tag{2.9}$$

În particular, rezultă că tensorul Bach se anulează dacă W^+, W^- sau Ric_0 se anulează, adică metricile (anti)autoduale şi cele Einstein sunt Bach-plate.

În continuare considerăm o suprafaţă Kähler (M, g, J, ω) şi enunţăm două rezultate legate de tensorul Bach al unei suprafeţe Kähler, care sunt demonstrate în [De83].

---

[28] Acest tensor apare în special în studiul structurilor Weyl. Se poate arăta că este un invariant conform şi are divergenţa nulă. În cazul dimensiunii 3, tensorul Cotton-York preia rolul tensorului Weyl pentru dimensiune mai mare ca 4 (şi care este identic nul în dimensiune 3), în sensul că reprezintă singura obstrucţie pentru ca varietatea să fie conform plată: pe o varietate riemanniană 3-dimensională (M, g) anularea tensorului Cotton-York este condiţia necesară şi suficientă pentru ca metrica g să fie conform plată.

[29] Tensorul Bach a fost studiat de fizicieni în cadrul teoriei relativităţii, prin considerarea funcţionalei $g \mapsto SW(g) := \int_M |W_g|^2\, vol_g$, care este diferenţiabilă şi al cărei gradient este tensorul Bach.

Dacă pe o suprafaţă Kähler notăm B^+ şi B^- partea J-invariantă, respectiv J-antiinvariantă a tensorului Bach, se obţin următoarele formule:

$$B^+ = sRic_0 + 2(\nabla ds)_0^+ \quad B^- = -(\nabla ds)^-,$$

unde $(\nabla ds)_0^+$ este partea J-invariantă fără urmă a Hessianei şi $(\nabla ds)^-$ este partea ei J-antiinvariantă. Din aceste formule rezultă următoarea echivalenţă:

Propozitia 2.6. *Pe o suprafaţă Kähler* (M, g, J, ω) *are loc:*
B este J-invariant $\Longleftrightarrow$ (M, g, J, ω) *este suprafaţă Kähler extremală*[30].

Propozitia 2.7. ([De83]) *Fie* (M, g, J, ω) *o suprafaţă Kähler şi U mulţimea deschisă pe care curbura scalară normalizată s nu se anulează. Pe U următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Tensorul Bach al suprafeţei Kähler* (M, g, J, ω) *se anulează;*
(ii) (M, g, J, ω) *este extremală şi metrica conformă* $\tilde{g} = s^{-2}g$ *este Einstein.*

Definiţia 2.14. Dacă tensorul Bach, B, este J-invariant, se defineşte 2-forma antiautoduală asociată, numită *forma Bach*, astfel:

$$\tilde{B}(\cdot, \cdot) = B(J\cdot, \cdot).$$

Observaţia 2.2. Când este J-invariant, tensorul Bach este determinat de forma Bach asociată $\tilde{B}$, care este dată de formula următoare:

$$\tilde{B} = (dJds)_0 + s\rho_0. \tag{2.10}$$

[30] *Cf.* Definiţia 5.1 pentru noţiunea de metrică extremală.

3. Definiţii şi proprietăţi

Definiţia 3.1. O *suprafaţă Kähler* (M, g, J) este o varietate Riemann 4-dimensională orientată, împreună cu o structură complexă J paralelă (*i.e.* astfel încât $\nabla J = 0$, unde ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricii g). Forma Kähler este 2-forma autoduală J-invariantă $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot\rangle$; ω este închisă şi (M, ω) este o varietate simplectică.

Pentru orice varietate riemanniană orientată M de dimensiune 4, operatorul Hodge $*$ este, conform Definiţiei 2.1, un automorfism al fibratului vectorial $\Lambda^2 T^*M$. Din Propoziţia 2.2 rezultă $*^2 = id$, deci $*$ are valorile proprii $\pm\ 1$ şi spaţiile proprii corespunzătoare, notate $\Lambda^{\pm}T^*M$, sau mai scurt $\Lambda^{\pm}M$ şi sunt numite spaţiul formelor autoduale, respectiv antiautoduale. Rezultă următoarea descompunere în sumă directă:

$$\Lambda^2 T^*M = \Lambda^+ T^*M \oplus \Lambda^- T^*M. \tag{3.1}$$

În fiecare punct p al varietăţii M, spaţiul vectorial $\Lambda^2_p M$ este 6-dimensional, iar fiecare dintre subspaţiile $\Lambda^{\pm}_p M$ are dimensiunea 3.

În plus, dacă (M, g, J) este varietate Kähler, fibraţii vectoriali obţinuţi au şi următoarea caracterizare care ne va fi utilă în cele ce urmează:

$\Lambda^+ M$ este suma ortogonală dintre fibratul trivial generat de ω şi fibratul 2-formelor J-antiinvariante

$\Lambda^- M$ este fibratul 2-formelor J-invariante fără urmă (numite şi primitive).

Aceasta se poate observa direct prin considerarea unei baze locale ortonormate adaptate $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2\}$ a spaţiului tangent şi a bazelor corespunzătoare pentru $\Lambda^+ M$, respectiv $\Lambda^- M$:
$\{f_1^+, f_2^+, f_3^+\}$, $\{f_1^-, f_2^-, f_3^-\}$, unde
$f_1^+ = e_1 \wedge Je_1 + e_2 \wedge Je_2, \quad f_1^- = e_1 \wedge Je_1 - e_2 \wedge Je_2,$
$f_2^+ = e_1 \wedge e_2 - Je_1 \wedge Je_2, \quad f_2^- = e_1 \wedge e_2 + Je_1 \wedge Je_2,$
$f_3^+ = e_1 \wedge Je_2 + Je_1 \wedge e_2, \quad f_3^- = e_1 \wedge Je_2 - Je_1 \wedge e_2.$
Atunci: $\omega = f_1^+$ şi se verifică direct că f_2^+, f_3^+ sunt 2-forme J-antiinvariante, iar f_1^-, f_2^-, f_3^- sunt 2-forme J-invariante.

Definiţia 3.2. O suprafaţă Kähler se numeşte *slab autoduală* dacă tensorul său Weyl antiautodual, W^-, este armonic[31], *i.e.* $\delta W^- = 0$.

Observaţia 3.1. În Definiţia 3.2, W^- armonic este echivalent cu $\delta W^- = 0$, unde δ este codiferenţiala care acţionează pe W^- ca pe o 2-formă cu valori în $\Lambda^- M$, pentru că pe spaţiul $\Lambda^- M$, diferenţiala exterioară d şi codiferenţiala δ se anulează simultan:

$$dW^- = *\delta * W^- = - * \delta W^- = 0.$$

[31] Considerăm, prin definiţie, că un tensor A este armonic dacă este închis şi coînchis, ceea ce este echivalent cu A în nucleul operatorului Laplace numai pe varietăţi compacte.

În continuare vom da condiţii echivalente cu cea din definiţie, pentru a ajunge la o condiţie care poate fi utilizată mai bine pentru clasificarea acestor suprafeţe.

Considerăm tensorul Cotton-York, C, al metricii riemanniene g (*cf.* Definiţia 2.12) şi folosind identitatea Bianchi diferenţială vom arăta că $\delta W = C$, de unde rezultă $\delta W^{\pm} = C^{\pm}$ şi atunci definiţia suprafeţei slab autoduale poate fi reformulată după cum urmează:

Definiţia 3.3. O suprafaţă Kähler este *slab autoduală* dacă tensorul său Cotton-York este autodual, *i.e.* $C^{-} = 0$.

Arătăm în continuare că $(\delta W)(X, Y, Z) = C_{Y,Z}(X)$, pentru orice câmpuri vectoriale X,Y,Z. Se observă din definiţie, că tensorul Cotton-York este antisimetric în primele două argumente, deci, fixând ultimul argument, X, rezultă că $C(X)$ este o 2-formă şi, în plus, re loc: $*(C(X)) = -C(X)$, deci tensorul C poate fi văzut ca o 1-formă cu valori în $\Lambda^{-}M$ şi astfel egalitatea poate fi interpretată ca $(\delta W)(X) = C(X)$, unde δ este codiferenţiala aplicată 2-formei W cu valori în $\Lambda^{-}M$. Această egalitate ne spune că pe o varietate riemanniană anularea tensorului Cotton-York este echivalentă cu faptul că tensorul Weyl este armonic. Mai întâi calculăm codiferenţiala lui R în două moduri. În cele ce urmează convenim că se face sumare după o bază locală ortonormată $\{e_i\}_{i=\overline{1,4}}$, fără a mai scrie simbolul de sumare. Folosind descompunerea lui R (*cf.* (A.5))avem: $\delta(R) = \delta(h \owedge g) + \delta W$.

$$
\begin{aligned}
\delta(h \owedge g)(X, Y, Z) &= -(\nabla_{e_i}(h \owedge g))(e_i, X, Y, Z) \\
&= -((\nabla_{e_i} h) \owedge g)(e_i, X, Y, Z) \quad (\text{deoarece} \nabla_{e_i} g = 0) \\
&= -(\nabla_{e_i} h)(e_i, Y) g(X, Z) - (\nabla_{e_i} h)(X, Z) g(e_i, Y) \\
&\quad + (\nabla_{e_i} h)(e_i, Z) g(X, Y) + (\nabla_{e_i} h)(X, Y) g(e_i, Z) \\
&= (\nabla_Z h)(X, Y) - (\nabla_Y h)(X, Z) + (\delta h)(Y) g(X, Z) \\
&\quad - (\delta h)(Z) g(X, Y) \\
&= C_{Y,Z}(X) + (\delta h)(Y) g(X, Z) - (\delta h)(Z) g(X, Y).
\end{aligned}
$$

Pe de altă parte, folosind identitatea Bianchi diferenţială, obţinem:

$$
\begin{aligned}
(\delta R)(X, Y, Z) &= -(\nabla_{e_i} R)(e_i, X, Y, Z) = -(\nabla_{e_i} R)(Y, Z, e_i, X) \\
&= (\nabla_Y R)(Z, e_i, e_i, X) + (\nabla_Z R)(e_i, Y, e_i, X) \quad (\textit{Bianchi } 2) \\
&= -(\nabla_Y R)(X, e_i, Z, e_i) + (\nabla_Z R)(X, e_i, Y, e_i) \\
&= -(\nabla_Y Ric)(X, Z) + (\nabla_Z Ric)(X, Y).
\end{aligned}
$$

Înlocuind $2h = Ric - sg$ în definiţia tensorului Cotton-York şi utilizând formulele obţinute mai sus pentru δR avem:

$$\begin{aligned}
2C_{Y,Z}(X) &= -(\nabla_Y Ric)(Z,X) + (\nabla_Z Ric)(Y,X) + ds(Y)g(Z,X) \\
&\quad - ds(Z)g(Y,X) \\
&= (\delta R)(X,Y,Z) + ds(Y)g(Z,X) - ds(Z)g(Y,X) \\
&= C_{Y,Z}(X) + (\delta h)(Y)g(X,Z) - (\delta h)(Z)g(X,Y) \\
&\quad + (\delta W)(X,Y,Z) + ds(Y)g(Z,X) - ds(Z)g(Y,X).
\end{aligned}$$

De aici, folosind relaţia $\delta h = -ds$ (care se obţine direct din definiţia lui h şi identitatea Bianchi contractată (2.7): $d\,scal = -2\delta Ric$), rezultă: $C_{YZ}(X) = (\delta W)(X,Y,Z)$.

Următoarea propoziţie ne dă drept corolar o condiţie echivalentă cu cea impusă tensorului Cotton-York, C, şi anume o formulă pentru derivata covariantă a formei Ricci fără urmă.

Propozitia 3.1. *Pentru orice suprafaţă Kähler (M, g, J, ω) avem:*

$$\nabla_X \rho_0 = -2C^-\left(JX\right) - \frac{1}{2}ds\left(X\right)\omega + \frac{1}{2}\left(ds \wedge JX - Jds \wedge X\right). \tag{3.2}$$

Demonstraţie. Înlocuind $2h = Ric - sg$ în definiţia tensorului Cotton-York, C, avem:

$$\begin{aligned}
2C_{X,Y}(Z) &= -(\nabla_X Ric)(Y,Z) + (\nabla_Y Ric)(X,Z) + ds(X)\left\langle Y,Z\right\rangle \\
&\quad - ds(Y)\left\langle X,Z\right\rangle \\
&= -(\nabla_X \rho)(Y,JZ) + (\nabla_Y \rho)(X,JZ) + ds(X)\left\langle Y,Z\right\rangle \\
&\quad - ds(Y)\left\langle X,Z\right\rangle \\
&= (\nabla_{JZ}\rho)(X,Y) + ds(X)\left\langle Y,Z\right\rangle - ds(Y)\left\langle X,Z\right\rangle.
\end{aligned}$$

Pentru a obţine ultima egalitate, am folosit faptul că forma Ricci este închisă, *i.e.* $d\rho = 0$ şi formula ciclică pentru derivata exterioară dată de (2.1). Înlocuind în formula obţinută pentru $C_{X,Y}(Z)$ pe Z cu JZ, obţinem:

$$(\nabla_Z \rho)(X,Y) = -2C_{X,Y}(JZ) - ds(X)\left\langle JY,Z\right\rangle + ds(Y)\left\langle JX,Z\right\rangle,$$

sau echivalent, folosind descompunerea $\rho = \rho_0 + \frac{3}{2}s\omega$:

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z \rho_0)(X,Y) &= -2C_{X,Y}(JZ) - \frac{3}{2}ds(Z)\left\langle JX,Y\right\rangle \\
&\quad - ds(X)\left\langle JY,Z\right\rangle + ds(Y)\left\langle JX,Z\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Componenta antiautoduală, adică conform caracterizării date la începutul secţiunii, partea J-invariantă şi fără urmă, a egalităţii (3.3) ne dă identitatea din enunţ. Deoarece ρ_0 este J-invariantă şi are urma nulă, rezultă că $\rho_0 \in \Lambda^- M$ şi cum derivata covariantă ∇ comută cu operatorul Hodge $*$, rezultă că partea stângă a ecuaţiei (3.3) este deja în $\Lambda^- M$. Partea dreaptă se rescrie astfel:

$$-2C_{X,Y}(JZ) - \frac{3}{2}ds(Z)\omega\,(X,Y) + (ds \wedge JZ)(X,Y),$$

şi are următoarea componentă autoduală, respectiv antiautoduală:

$$-2C^+(JZ) - ds(Z)\omega + \frac{1}{2}(ds \wedge JZ + Jds \wedge Z),$$

$$-2C^-(JZ) - \frac{1}{2}ds(Z)\omega + \frac{1}{2}(ds \wedge JZ - Jds \wedge Z).$$

Egalând componentele antiautoduale ale ecuaţiei (3.3), modulo o renotare a variabilelor, obţinem (3.2). □

Rezultă astfel imediat următoarea caracterizare utilă pentru suprafeţele Kähler slab autoduale:

Corolarul 3.1. *Suprafaţa Kähler (M, g, J, ω) este slab autoduală dacă şi numai dacă pentru orice câmp vectorial X are loc formula următoare, numită identitatea Matsumoto-Tanno:*

$$\nabla_X \rho_0 = -\frac{1}{2}ds\,(X)\,\omega + \frac{1}{2}\,(ds \wedge JX - Jds \wedge X)\,. \tag{3.4}$$

4. 2-Forme hamiltoniene

Începem această secţiune prin considerarea noţiunii de 2-formă twistor, cu scopul de a arăta că ecuaţia (3.4) obţinută pentru partea fără urmă a formei Ricci pe o suprafaţă Kähler slab autoduală este acelaşi lucru cu a spune că ρ_0 este formă twistor.

Noţiunea de formă twistor poate fi definită pe orice varietate Riemann n-dimensională M şi apare ca o generalizare naturală a câmpurilor vectoriale conforme, în sensul că 1-formele twistor corespund, prin identificarea dată de metrică, câmpurilor vectoriale conforme. Dăm următoarea definiţie[32] pentru forme twistor:

Definiţia 4.1. O p-formă φ se numeşte *p-formă twistor* dacă, pentru orice câmp vectorial X, φ satisface ecuaţia:

$$\nabla_X\varphi = \frac{1}{p+1}X\lrcorner d\varphi - \frac{1}{n-p+1}X\wedge\delta\varphi. \tag{4.1}$$

Pe noi ne interesează ce înseamnă pe o varietate orientată M de dimensiune 4, că o 2-formă antiautoduală este 2-formă twistor, de aceea vom rescrie ecuaţia (4.1) din definiţie pentru acest caz special, ajungând la o caracterizare echivalentă a formelor twistor antiautoduale, care în articolul [CP02] este luată drept definiţie. Fie $\varphi\in\Lambda^-M$, atunci φ este 2-formă twistor dacă şi numai dacă:

$$\begin{aligned}\nabla_X\varphi &= \frac{1}{3}X\lrcorner d\varphi - \frac{1}{3}X\wedge\delta\varphi = -\frac{1}{3}X\lrcorner(*\delta*\varphi) - \frac{1}{3}X\wedge\delta\varphi\\ &= \frac{1}{3}X\lrcorner(*\delta\varphi) - \frac{1}{3}X\wedge\delta\varphi \quad (\text{deoarece} *\varphi=-\varphi)\\ &= \frac{1}{3}*(X\wedge\delta\varphi) - \frac{1}{3}X\wedge\delta\varphi\\ &= (\frac{1}{3}\delta\varphi)\wedge X - *((\frac{1}{3}\delta\varphi)\wedge X).\end{aligned}$$

Dacă notăm $\frac{2}{3}\delta\varphi$ cu γ, atunci obţinem că φ este 2-formă twistor antiautoduală[33] dacă şi numai dacă există γ în Λ^1M astfel încât să avem:

$$\nabla_X\varphi = \frac{1}{2}(\gamma\wedge X - *(\gamma\wedge X)) = (\gamma\wedge X)^-. \tag{4.2}$$

Dacă varietatea M admite în plus o structură aproape hermitiană J, care este pozitiv definită (în sensul că 2-forma corespunzătoare lui

[32] Am considerat definiţia generală pentru forme twistor aşa cum este dată în [MS02], unde p-formele twistor sunt secţiuni în nucleul unui operator diferenţial T, numit operatorul twistor, care apare ca proiecţia derivatei covariante a unei p-forme pe unul dintre sumanzii descompunerii produsului tensorial $\Lambda^1M\otimes\Lambda^pM$ sub acţiunea lui $O(n)$.

[33] În continuare prin forme twistor vom înţelege forme twistor antiautoduale.

J, ω_J, este autoduală), atunci putem descrie mai simplu acţiunea operatorului $*$ pe 2-forme descompuse astfel:

$$*(X \wedge Y) = -JX \wedge JY + \omega_J(X,Y)\omega_J. \tag{4.3}$$

Această formulă se poate verifica direct considerând o bază locală adaptată, $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2\}$, folosind definiţia operatorului $*$ şi faptul că forma volum a lui (M,g) este $vol_g = e_1 \wedge Je_1 \wedge e_2 \wedge Je_2$, deoarece J este pozitiv orientat.

Reamintim că orice secţiune nenulă φ a lui $\Lambda^- M$, se poate scrie unic ca $\varphi = \lambda\omega_I$, unde $\lambda = |\varphi|/\sqrt{2}$ este o funcţie pozitivă şi ω_I este forma Kähler a unei structuri aproape complexe I pe (M,g), *i.e.* $\omega_I(\cdot,\cdot) = g(I\cdot,\cdot)$.

Acum putem formula şi demonstra următoarea caracterizare geometrică importantă a 2-formelor twistor:

Propozitia 4.1. *Dacă φ este o secţiune nenulă a lui $\Lambda^- M$, atunci φ este 2-formă twistor dacă şi numai dacă structura aproape hermitiană $(\bar g = \lambda^{-2} g, I)$ este Kähler, cu forma Kähler $\bar\omega = \lambda^{-2}\omega_I = \lambda^{-3}\varphi$.*

Demonstraţie. Structura aproape hermitiană $(\bar g = \lambda^{-2} g, I)$ este Kähler dacă şi numai dacă I este paralel faţă de derivata covariantă a metricii $\bar g$, notată $\bar\nabla$ şi care este dată de următoarea formulă:

$$\bar\nabla_X Y = \nabla_X Y - \lambda^{-1} d\lambda(X) Y - \lambda^{-1} d\lambda(Y) X + \lambda^{-1} g(X,Y)\,\mathrm{grad}\,\lambda,$$

iar pentru I avem:

$$\begin{aligned}
(\bar\nabla_X I)(Y) &= (\bar\nabla_X IY) - I(\bar\nabla_X Y) \\
&= \nabla_X(IY) - \lambda^{-1} d\lambda(X) IY - \lambda^{-1} d\lambda(IY) X + \lambda^{-1} g(X,IY) d\lambda \\
&- I\nabla_X(Y) + \lambda^{-1} d\lambda(X) IY + \lambda^{-1} d\lambda(Y) IX - \lambda^{-1} g(X,Y) I d\lambda \\
&= (\nabla_X I)Y - \lambda^{-1} d\lambda(IY) X + \lambda^{-1} d\lambda(Y) IX \\
&+ \lambda^{-1} g(X,IY) d\lambda - \lambda^{-1} g(X,Y) I d\lambda \\
&= (\nabla_X I)Y + \lambda^{-1}(Id\lambda \wedge X)(Y) + \lambda^{-1}(d\lambda \wedge IX)(Y).
\end{aligned}$$

Este, deci, necesar şi suficient să arătăm următoarea formulă:

$$\nabla_X I = -\lambda^{-1} Id\lambda \wedge X - \lambda^{-1} d\lambda \wedge IX.$$

Pornind de la caracterizarea echivalentă dată de (4.2) pentru 2-forme twistor, ştim că există o 1-formă γ astfel încât $\nabla_X\varphi = (\gamma \wedge X)^-$, iar din ipoteză avem $\varphi = \lambda\omega_I$, unde $I^2 = -Id$. Arătăm mai întâi că 1-forma γ este dată de $\gamma = -2Id\lambda$, contractând (4.2) cu φ:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \nabla_X\varphi \rangle &= \left\langle \varphi, (\gamma \wedge X)^- \right\rangle = \langle \lambda\omega_I, \gamma \wedge X \rangle = \lambda \langle \omega_I, \gamma \wedge X \rangle \\
&= \lambda\omega_I(\gamma, X) = \lambda I\gamma(X).
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\langle \varphi, \nabla_X\varphi \rangle = \frac{1}{2} X(\langle \varphi, \varphi \rangle) = \frac{1}{2} X(2\lambda^2) = 2\lambda d\lambda(X),$$

deci rezultă $\gamma = -2Id\lambda$ şi avem în continuare:

$$\nabla_X \varphi = -2(Id\lambda \wedge X)^-,$$

$$\nabla_X \varphi = \nabla_X(\lambda I) = d\lambda(X)I + \lambda \nabla_X I,$$

de unde rezultă:

$$\nabla_X I = -\lambda^{-1} d\lambda(X)I - 2\lambda^{-1}(Id\lambda \wedge X)^-. \tag{4.4}$$

Pentru a finaliza, explicităm $2(Id\lambda \wedge X)^-$ folosind (4.3), cu observaţia că semnele din partea dreaptă a egalităţii se modifică, deoarece structura aproape hermitiană pe care o considerăm de data aceasta, I, este negativ orientată:

$$\begin{aligned} 2(Id\lambda \wedge X)^- &= Id\lambda \wedge X - *(Id\lambda \wedge X) \\ &= Id\lambda \wedge X + d\lambda \wedge IX + \omega_I(Id\lambda, X)I \\ &= Id\lambda \wedge X + d\lambda \wedge IX - d\lambda(X)I. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Din (4.4) şi (4.5) obţinem relaţia dorită:

$$\nabla_X I = -\lambda^{-1} Id\lambda \wedge X - \lambda^{-1} d\lambda \wedge IX.$$

□

Folosind (4.3) şi caracterizarea echivalentă pentru 2-forme twistor dată de (4.2) şi notând γ cu $-2J\beta$, obţinem următorul rezultat:

Lema 4.1. *Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler şi φ o 2-formă antiautoduală. Atunci φ este o 2-formă twistor dacă şi numai dacă pentru orice câmp vectorial X avem:*

$$\nabla_X \varphi = -\beta(X)\omega + \beta \wedge JX - J\beta \wedge X. \tag{4.6}$$

Comparând această ecuaţie cu (3.4), obţinută pentru ρ_0 pe o suprafaţă slab autoduală, obţinem rezultatul anunţat la începutul acestei secţiuni:

Propozitia 4.2. *O suprafaţă Kähler este slab autoduală dacă şi numai dacă partea fără urmă a formei Ricci, ρ_0, este o 2-formă twistor.*

Demonstraţie. Dacă suprafaţa Kähler este slab autoduală, atunci conform (3.4) avem 1-forma $\beta = -\frac{1}{2}ds$ care îndeplineşte ecuaţia (4.6), rezultând din lema precedentă că ρ_0 este 2-formă twistor.

Reciproc, dacă ρ_0 este 2-formă twistor, tot din lema precedentă arătăm că 1-forma β trebuie să fie egală cu $-\frac{1}{2}ds$ şi, folosind în sens invers echivalenţa dată de Corolarul 3.1, rezultă că suprafaţa este slab autoduală. Dacă $\nabla_X \rho_0 = -\beta(X)\omega + \beta \wedge JX - J\beta \wedge X$, folosind formula ciclică pentru derivata exterioară dată de (2.1), se obţine prin calcul direct $d\rho_0 = 3\beta \wedge \omega$ şi cum $d\rho_0 = -\frac{3}{2}ds \wedge \omega$ şi $\wedge\omega$ este injectivă pe 2-forme, rezultă că $\beta = -\frac{1}{2}ds$. □

Din Propoziţia 4.1 rezultă următoarea caracterizare echivalentă pentru suprafeţele slab autoduale pe mulţimea deschisă unde nu sunt Kähler-Einstein.

Propozitia 4.3. *Pe mulţimea deschisă M_0, unde $\rho_0 = \lambda\omega_I$ nu se anulează, suprafaţa Kähler (M, g, J, ω) este slab autoduală dacă şi numai dacă perechea $(\bar{g} = \lambda^{-2}g, I)$ este Kähler cu forma Kähler $\bar{\omega} = \lambda^{-2}\omega_I$.*

Observaţia 4.1. Această propoziţie ne dă pe mulţimea M_0, unde metrica nu este Kähler-Einstein, o expresie simplă pentru tensorul Weyl antiautodual, W^-. Aceasta rezultă din faptul că I este o structură complexă care induce orientarea opusă faţă de cea indusă de J, astfel încât tensorul W_J^-, care este considerat în raport cu orientarea iniţială dată de J, este egal cu W_I^+ considerat în raport cu orientarea dată de I, iar expresia părţii autoduale a tensorului Weyl pe o suprafaţă Kähler este dată de :

$$W^+ = \frac{3}{4}s\omega \otimes_0 \omega,$$

unde $\omega \otimes_0 \omega$ reprezintă partea fără urmă a produsului tensorial văzut ca endomorfism al lui $\Lambda^+ M$. Folosind proprietatea de invarianţă conformă a tensorului Weyl, văzut ca $(0,4)$-tensor, obţinem:

$$\begin{aligned} W_J^- &= W_I^+ = \lambda^2 \bar{W}_I^+ = \frac{3}{4}\lambda^2 \bar{s}\bar{\omega} \otimes_0 \bar{\omega} \\ &= \frac{3}{4}\bar{s}\lambda^{-2}\omega_I \otimes_0 \omega_I = \frac{3}{4}\kappa\omega_I \otimes_0 \omega_I, \end{aligned} \tag{4.7}$$

unde $\kappa = \bar{s}\lambda^{-2}$ este curbura scalară conformă (normalizată) a perechii hermitiene (g, I).

În general, curbura scalară (normalizată) se defineşte pentru orice structură hermitiană (g, I) astfel:

$$\kappa = s + \delta\theta - |\theta|^2, \tag{4.8}$$

unde s este curbura scalară (normalizată) a metricii g, iar θ este forma Lee a perechii (g, I) definită prin relaţia:

$$d\omega_I = -2\theta \wedge \omega_I.$$

Dacă $(\bar{g}, I)$ este o metrică Kähler din clasa conformă a lui g, $\bar{g} = \lambda^{-2}g$, atunci verificăm că are loc egalitatea:

$$\kappa = \bar{s}\lambda^{-2}. \tag{4.9}$$

Pe o varietate n-dimensională, la o schimbare conformă a metricii are loc următoarea relaţie între curburile scalare:

$$scal^{\lambda^{-2}g} = \lambda^2(scal^g - 2(n-1)\delta(\lambda^{-1}d\lambda) - (n-2)(n-1)\left|\lambda^{-1}d\lambda\right|^2).$$

În particular, în dimensiune 4, pentru curbura scalară normalizată obţinem:

$$\bar{s} = \lambda^2(s - \delta(\lambda^{-1}d\lambda) - \left|\lambda^{-1}d\lambda\right|^2). \tag{4.10}$$

Deoarece $(\bar{g} = \lambda^{-2}g, I)$ a fost presupusă Kähler rezultă $\theta = -\lambda^{-1}d\lambda$:

$$0 = d(\lambda^{-2}\omega_I) = \lambda^{-2}(-2\lambda^{-1}d\lambda \wedge \omega_I + d\omega_I) = -2\lambda^{-2}(\lambda^{-1}d\lambda \wedge \omega_I + \theta \wedge \omega_I).$$

Introducând pe θ în (4.10) rezultă $\bar{s} = \lambda^2(s+\delta\theta-|\theta|^2)$, deci conform, definiţiei curburii scalare conforme κ, obţinem relaţia dorită: $\kappa = \bar{s}\lambda^{-2}$.

Observaţia 4.2. Observăm că s-a folosit numai faptul că ρ_0 este o 2-formă twistor, care are în plus proprietatea că 1-forma β (dată de (4.6)) este exactă, ceea ce este echivalent cu faptul că forma Ricci, $\rho = \rho_0 + \frac{3}{2}s\omega$, este închisă. Astfel suntem conduşi în mod natural la introducerea noţiunii de 2-formă hamiltoniană şi în continuare vom prezenta clasificarea unei clase mai mari de suprafeţe Kähler, cele care admit o 2-formă hamiltoniană, iar după aceea vedem cum se reflectă aceasta în cazul particular al suprafeţelor Kähler slab autoduale, care admit drept 2-formă hamiltoniană forma Ricci, ρ.

Definiţia 4.2. O 2-formă φ pe o suprafaţă Kähler (M, g, J, ω) se numeşte *hamiltoniană*[34] dacă este închisă, J-invariantă şi partea ei fără urmă (sau echivalent, partea antiautoduală), φ_0, este 2-formă twistor.

În general observăm că 2-formele hamiltoniene sunt caracterizate de un analog al identităţii Matsumoto-Tanno.

Lema 4.2. *Fie* (M, g, J, ω) *o suprafaţă Kähler. Atunci o 2-formă J-invariantă,* $\varphi = \varphi_0+\frac{3}{2}\sigma\omega$*, este hamiltoniană dacă şi numai dacă pentru orice câmp vectorial* X *are loc:*

$$\nabla_X\varphi_0 = -\frac{1}{2}d\sigma(X)\omega + \frac{1}{2}(d\sigma \wedge JX - Jd\sigma \wedge X). \tag{4.11}$$

Demonstraţie. Rezultă direct din Lema 4.1, la fel ca în demonstraţia Propoziţiei 4.2, deoarece obţinem $d\varphi_0 = -\frac{3}{2}d\sigma \wedge \omega$ dacă şi numai dacă $\beta = \frac{1}{2}d\sigma$. □

În continuare, vom prezenta în următoarele două teoreme, proprietăţi importante ale suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană şi care reprezintă cheia clasificării locale a acestor suprafeţe.

Oricărei 2-forme J-invariante

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{3}{2}\sigma\omega$$

îi asociem 2-forma normalizată:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\omega.$$

(de exemplu pentru forma Ricci, ρ, 2-forma normalizată asociată este $\tilde{\rho} = h$).

Prima proprietate ne spune că pentru orice 2-formă hamiltoniană φ, urma şi pfaffianul lui $\tilde{\varphi}$ sunt potenţiale de olomorfie. Înainte de a arăta aceasta, dăm definiţia pfaffianului unei forme şi îl calculăm pentru $\tilde{\varphi}$.

[34]Din cele ce urmează va reieşi motivaţia utilizării termenului „hamiltonian", în sensul că vom demonstra că o suprafaţă cu o 2-formă hamiltoniană admite două câmpuri Killing hamiltoniene (*cf.* Teorema 4.1).

Definiţia 4.3. *Pfaffianul* unei 2-forme ψ, notat $\mathrm{pf}(\psi)$ este dat de formula:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{pf}(\psi) = *(\psi \wedge \psi).$$

Observaţia 4.3. Folosind definiţia operatorului Hodge $*$ (*cf.* Definiţia 2.1): $\alpha\wedge(*\beta) = g(\alpha, \beta)vol_g$ şi $\omega\wedge\omega = 2vol_g$, avem următoarea rescriere a definiţiei pfaffianului:

$$\psi \wedge \psi = \frac{1}{2}\,\mathrm{pf}(\psi)vol_g = \frac{1}{4}\,\mathrm{pf}(\psi)\omega \wedge \omega.$$

Pentru $\tilde{\varphi} = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\omega$, pfaffianul este:

$$\pi = \mathrm{pf}(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{4}\sigma^2 - \frac{1}{2}\left|\varphi_0\right|^2, \tag{4.12}$$

obţinut folosind observaţia precedentă şi faptul că φ_0 este antiautoduală (deoarece este J-invariantă şi fără urmă):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\pi vol_g = \tilde{\varphi} \wedge \tilde{\varphi} &= (\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\omega) \wedge (\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\omega)\\
&= \frac{1}{4}\varphi_0 \wedge \varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\varphi_0 \wedge \omega + \frac{1}{16}\sigma^2\omega \wedge \omega\\
&= -\frac{1}{4}\varphi_0 \wedge (*\varphi_0) + \frac{1}{8}\sigma^2 vol_g\\
&= -\frac{1}{4}\left|\varphi_0\right|^2 vol_g + \frac{1}{8}\sigma^2 vol_g,
\end{aligned}$$

unde $\omega \wedge \varphi_0 = -\omega \wedge (*\varphi_0) = -g(\omega, \varphi_0)vol_g = 0$, deoarece ω este autoduală, iar $\Lambda^- M$ şi $\Lambda^+ M$ sunt ortogonale. Dacă notăm $\lambda = \left|\varphi_0\right|/\sqrt{2}$, avem:

$$\pi = \mathrm{pf}(\tilde{\varphi}) = \left(\frac{\sigma}{2} + \lambda\right)\left(\frac{\sigma}{2} - \lambda\right).$$

Teorema 4.1. *Fie (M, g, J, ω)o suprafaţă Kähler şi $\varphi = \varphi_0 + \frac{3}{2}\sigma\omega$ o 2-formă hamiltoniană. Atunci urma σ şi pfaffianul π ale lui $\tilde{\varphi} = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\omega$ sunt potenţiale de olomorfie care comută Poisson.*

Demonstraţie. (i) Identitatea (4.11) se rescrie în funcţie de $\tilde{\varphi}$ astfel:

$$\nabla_X\tilde{\varphi} = \frac{1}{4}(d\sigma \wedge JX - Jd\sigma \wedge X). \tag{4.13}$$

Diferenţiem încă o dată şi antisimetrizăm pentru a calcula $R_{XY} \cdot \tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
\nabla_Y\nabla_X\tilde{\varphi} &= \frac{1}{4}[\nabla_Y(d\sigma \wedge JX) - \nabla_Y(Jd\sigma \wedge X)]\\
&= \frac{1}{4}[\nabla_Y(d\sigma) \wedge JX + d\sigma \wedge \nabla_Y(JX)\\
&\quad - \nabla_Y(Jd\sigma) \wedge X - Jd\sigma \wedge \nabla_Y X].
\end{aligned}$$

Atunci, din faptul că ∇ este fără torsiune şi J este paralel, obţinem:

$$R_{XY} \cdot \tilde{\varphi} = \nabla_{[X,Y]}\tilde{\varphi} - \nabla_X \nabla_Y \tilde{\varphi} + \nabla_Y \nabla_X \tilde{\varphi}$$
$$= \frac{1}{4}(\nabla_Y d\sigma \wedge JX - \nabla_X d\sigma \wedge JY - J\nabla_Y d\sigma \wedge X + J\nabla_X d\sigma \wedge Y).$$

Deoarece $R_{XY} \cdot \tilde{\varphi}$ este J -invariant în X şi Y avem:

(4.14)

$$\nabla_Y d\sigma \wedge JX - \nabla_X d\sigma \wedge JY - J\nabla_Y d\sigma \wedge X + J\nabla_X d\sigma \wedge Y$$
$$= -\nabla_{JY} d\sigma \wedge X + \nabla_{JX} d\sigma \wedge Y - J\nabla_{JY} d\sigma \wedge JX + J\nabla_{JX} d\sigma \wedge JY.$$

Notăm $S(X) = \nabla_X d\sigma + J\nabla_{JX} d\sigma$ (despre care vrem să arătăm că se anulează, pentru a rezulta că $\nabla d\sigma$ este J-invariant, ceea ce este echivalent cu σ potenţial de olomorfie) şi (4.14) devine:

$$S(Y) \wedge JX - JS(Y) \wedge X - S(X) \wedge JY + JS(X) \wedge Y = 0. \tag{4.15}$$

Ca obiect algebric, S este un endomorfism a lui TM, care este simetric şi J-antiinvariant, după cum vom arăta. Atunci, contractând (4.15) cu un câmp vectorial Z şi luând urma după Y şi Z, obţinem $S = 0$, astfel:

$$g(S(Y), Z)JX - S(Y)g(JX, Z) - g(JS(Y), Z)X$$
$$+ g(X, Z)JS(Y) - g(S(X), Z)JY + g(JY, Z)S(X)$$
$$+ g(JS(X), Z)Y - g(Y, Z)JS(X) = 0.$$

Fie $\{e_1, e_2 = Je_1, e_3, e_4 = Je_3\}$ o bază locală ortonormată adaptată şi considerăm urma după Y şi Z a identităţii de mai sus:

$$\begin{aligned} &g(S(e_i), e_i)JX - S(e_i)g(JX, e_i) - g(JS(e_i), e_i)X \\ &+ g(X, e_i)JS(e_i) - g(S(X), e_i)Je_i + g(Je_i, e_i)S(X) \\ &+ g(JS(X), e_i)e_i - g(e_i, e_i)JS(X) = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Cum JS şi J sunt antisimetrice faţă de g, urma lor este zero şi termenii din sumă corespunzători dispar. La fel avem (tot cu sumare după $i = \overline{1,4}$):

$$g(S(e_i), e_i) = g(JS(e_i), Je_i) = g(-S(Je_i), Je_i) = -g(S(e_i), e_i),$$

de unde obţinem $g(S(e_i), e_i) = 0$; ultima egalitate a rezultat din faptul că sumarea după $\{Je_i\}$ este acelaşi lucru cu sumarea după $\{e_i\}$. Asemănător obţinem:

$$g(JS(X), e_i)e_i - g(S(X), e_i)Je_i = g(JS(X), Je_i)Je_i + g(S(X), Je_i)e_i$$
$$= -[g(JS(X), e_i)e_i - g(S(X), e_i)Je_i],$$

deci $g(JS(X), e_i)e_i - g(S(X), e_i)Je_i = 0$ şi din suma (4.16) rămâne:

$$-S(JX) + JS(X) - 4JS(X) = 0.$$

Cum S anticomută cu J rezultă $S \equiv 0$, adică $\nabla_{JX} d\sigma = J\nabla_X d\sigma$, ceea ce este echivalent cu $\operatorname{grad}\sigma$ real analitic, deci rezultă că σ este potenţial de olomorfie.

A rămas să arătăm proprietăţile lui S: simetria şi J-antiinvarianţa.

$S(JX) = \nabla_{JX} d\sigma - J\nabla_X d\sigma = -J(\nabla_X d\sigma + J\nabla_{JX} d\sigma) = -J(S(X))$.

$$\begin{aligned} g(S(X), Y) &= g(\nabla_X d\sigma, Y) + g(J\nabla_{JX} d\sigma, Y) \\ &= X(g(d\sigma, Y)) - g(d\sigma, \nabla_X Y) - g(\nabla_{JX} d\sigma, JY) \\ &= X(d\sigma(Y)) - d\sigma(\nabla_X Y) - JX(d\sigma(JY)) + d\sigma(\nabla_{JX} JY) \\ &= X(Y(\sigma)) - (\nabla_X Y)(\sigma) - JX(JY(\sigma)) + (\nabla_{JX} JY)(\sigma). \end{aligned}$$

Atunci avem şi :

$$g(X, S(Y)) = Y(X(\sigma)) - (\nabla_Y X)(\sigma) - JY(JX(\sigma)) + (\nabla_{JY} JX)(\sigma).$$

Scăzând ultimile două relaţii, obţinem:

$$g(S(X), Y) - g(X, S(Y)) = 0,$$

deci S este simetric în raport cu metrica g.

(ii) Din (4.13) rezultă:

$$(\nabla_X \tilde{\varphi}) \wedge \tilde{\varphi} = \frac{1}{2}(X \wedge Jd\sigma \wedge \tilde{\varphi}), \tag{4.17}$$

deoarece avem $d\sigma \wedge JX \wedge \tilde{\varphi} = X \wedge Jd\sigma \wedge \tilde{\varphi}$, pentru că ambele fiind 4-forme este suficient să fie egale pe baza $e_1 \wedge Je_1 \wedge e_2 \wedge Je_2$, ceea ce se verifică direct, ţinând cont de relaţia:

$$J(d\sigma \wedge JX \wedge \tilde{\varphi}) = X \wedge Jd\sigma \wedge \tilde{\varphi}.$$

Cum $\frac{1}{2}\pi vol_g = \tilde{\varphi} \wedge \tilde{\varphi}$, derivând în raport cu X şi înlocuind (4.17) obţinem:

$$\begin{aligned} d\pi(X) vol_g &= 2X \wedge Jd\sigma \wedge \tilde{\varphi}. \\ d\pi(X) &= 2 * (X \wedge Jd\sigma \wedge \tilde{\varphi}) \\ &= -2X \lrcorner * (Jd\sigma \wedge \tilde{\varphi}.) \end{aligned}$$

Astfel am obţinut:

$$d\pi = -2 * (Jd\sigma \wedge \tilde{\varphi}), \tag{4.18}$$

şi , folosind din nou (4.13), avem următoarea expresie pentru derivata covariantă a lui $d\pi$:

$$\begin{aligned} \nabla_X d\pi &= -2 * (J\nabla_X d\sigma \wedge \tilde{\varphi} + Jd\sigma \wedge \nabla_X \tilde{\varphi}) \\ &= -2 * (J\nabla_X d\sigma \wedge \tilde{\varphi} + \frac{1}{4} Jd\sigma \wedge d\sigma \wedge JX). \end{aligned}$$

Al doilea termen din partea dreaptă a egalităţii este J-invariant şi la fel este primul, deoarece am arătat la punctul (i) că σ este potenţial de olomorfie. Rezultă astfel că şi π este potenţial de olomorfie.

(iii) Contractând (4.18) cu $Jd\sigma$ obţinem:

$$\begin{aligned} \{\sigma, \pi\} &= \omega(Jd\sigma, Jd\pi) = -g(d\pi, Jd\sigma) \\ &= -d\pi(Jd\sigma) = 2Jd\sigma \lrcorner * (Jd\sigma \wedge \tilde{\varphi}) \\ &= *(Jd\sigma \wedge Jd\sigma \wedge \tilde{\varphi}) = 0. \end{aligned}$$

Rezultă astfel că σ şi π comută Poisson. $\square$

Observaţia 4.4. Câmpurile hamiltoniene corespunzătoare potenţialelor de olomorfie σ şi π, $K_1 = J \operatorname{grad} \sigma$ şi $K_2 = J \operatorname{grad} \pi$, sunt Killing în raport cu metrica g, conform echivalenţei stabilite în Observaţia 2.1. În plus, cum σ şi π comută Poisson, rezultă că şi câmpurile K_1 şi K_2 comută, datorită relaţiei: $[X_{f_1}, X_{f_2}] = X_{\{f_1,f_2\}}$, unde X_f este câmpul hamiltonian asociat funcţiei f. De asemenea, am văzut în demonstraţie, că cele două câmpuri Killing sunt ortogonale în raport cu ω: $\omega(K_1, K_2) = 0$.

Observaţia 4.5. În general, câmpurile Killing vectoriale K_1 şi K_2 nu rezultă nenule sau independente. Spre exemplu, dacă σ este constantă, atunci ambele câmpuri se anulează deoarece forma φ, rezultă paralelă din (4.11).

Următoarea consecinţă importantă a teoremei reprezintă punctul de plecare în clasificarea suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană.

Corolarul 4.1. *Cu aceleaşi ipoteze ca în teoremă, pe fiecare componentă conexă a varietăţii M, are loc una din următoarele situaţii:*

(1) $K_1 \wedge K_2$ *este nenulă pe o mulţime deschisă densă;*
(2) $K_1 \wedge K_2$ *se anulează identic, dar* K_1 *este nenul pe o mulţime deschisă densă;*
(3) K_1 *şi* K_2 *se anulează identic.*

Demonstraţie. K_1 şi K_2 sunt în particular câmpuri vectoriale reale analitice (*i.e.* $\mathcal{L}_{K_1} J = \mathcal{L}_{K_2} J = 0$), astfel încât $K_1^{1,0}$ şi $K_2^{1,0}$ sunt câmpuri vectoriale complexe olomorfe, deci şi $K_1^{1,0} \wedge K_2^{1,0}$ este câmp vectorial olomorf. Astfel, pe fiecare componentă conexă a lui M, conform principiului de identitate, fiecare dintre aceste câmpuri olomorfe fie se anulează identic, fie este nenul pe o mulţime deschisă densă. Cu observaţia că anularea câmpului K_1 implică şi anularea celuilalt câmp Killing, K_2, corolarul este demonstrat. Presupunând K_1 identic nul, rezultă că σ este constantă şi atunci din (4.11) rezultă că φ_0 este paralelă, deci $|\varphi_0|$ este constantă şi conform (4.12) funcţia π este constantă, deci $K_2 = J \operatorname{grad} \pi$ este identic nul. $\square$

Observaţia 4.6. În al treilea caz, în care câmpurile K_1 şi K_2 se anulează identic, 2-forma hamiltoniană φ nu conţine, în cazul general, multă informaţie despre geometria varietăţii M (ar putea fi numai un multiplu constant al formei Kähler ω), dar în primele două cazuri vom prezenta în secţiunile următoare clasificarea locală a suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană, care a fost realizată în [ACG03].

În continuare prezentăm o altă consecinţă importantă, de data aceasta a corolarului, care ne va permite să facem raţionamente de prelungire prin continuitate pentru a obţine rezultate globale. Notăm cu

M_0 mulţimea deschisă a lui M unde φ_0 (partea fără urmă a 2-formei hamiltoniene φ) este nenulă.

Corolarul 4.2. *Dacă φ este o 2-formă hamiltoniană pe o suprafaţă Kähler M, atunci, pe fiecare componentă conexă a lui M, mulţimea M_0 este vidă sau densă.*

Demonstraţie. Pe fiecare componentă conexă a lui M există două posibilităţi pentru câmpul vectorial Killing $K_1 = J \operatorname{grad} \sigma$: fie este identic zero, fie mulţimea unde nu se anulează este densă.

În primul caz, dacă K_1 se anulează peste tot, atunci am văzut că forma φ_0 este paralelă, deci $|\varphi_0|$ este constantă şi atunci forma φ_0 fie se anuleaza peste tot, *i.e.* M_0 este vidă, fie nu anulează nicăieri, *i.e.* M_0 coincide cu respectiva componentă conexă.

Dacă K_1 nu este identic zero, atunci mulţimea U, pe care $d\sigma$ nu se anulează, este densă. Deoarece $\nabla\varphi_0$ nu se anulează pe U (dacă într-un punct x are loc $(\nabla\varphi_0)_x = 0$, rezultă $(d\varphi_0)_x = 0$, echivalent cu $-\frac{3}{2}(d\sigma \wedge \omega)_x = 0$ şi cum $\wedge\omega$ este injectivă, rezultă $d\sigma_x = 0$, adică x nu aparţine lui U), rezultă că mulţimea de zerouri ale lui φ_0 are complementara, notată M_0, densă în componenta conexă respectivă. $\square$

Pentru orice 2-formă hamiltoniană φ, scriem sub următoarea formă urma σ şi pfaffianul π ale 2-formei normalizate asociate $\tilde{\varphi}$:

$$\sigma = \xi + \eta, \quad \pi = \xi\eta,$$

atunci $\lambda = |\varphi_0| / \sqrt{2} = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$. Cu aceste notaţii enunţăm a doua proprietate importantă a suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană.

Teorema 4.2. *Fie φ o 2-formă hamiltoniană pe o suprafaţă Kähler M. Atunci pe fiecare componentă conexă a lui M, pe care forma φ_0 nu se anulează identic, $d\xi$ şi $d\eta$ sunt ortogonale.*

Demonstraţie. Contractând (4.11) cu φ_0, care este o formă J-invariantă, avem:

$$\langle \nabla_X \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \frac{1}{2} \left(\varphi_0(d\sigma, JX) - \varphi_0(Jd\sigma, X) \right) = -\varphi_0(Jd\sigma, X),$$

de unde rezultă:

$$2\lambda d\lambda = d(\lambda^2) = \frac{1}{2} d(|\varphi_0|^2) = \langle \nabla\varphi_0, \varphi_0 \rangle = -\varphi_0(Jd\sigma, \cdot). \tag{4.19}$$

Deoarece φ_0 este o 2-formă J-invariantă, se identifică cu ajutorul metricii cu un endomorfism antisimetric al fibrării TM, care comută cu J şi pe care îl notăm tot φ_0. Aceeaşi proprietate o are atunci şi endomorfismul $\varphi_0 \circ J$, care în plus este şi simetric. De aceea $\varphi_0 \circ J$ are toate valorile proprii reale şi orice valoare proprie are multiplicitate pară (o dată cu un vector propriu X şi JX este vector propriu corespunzător aceleiaşi valori proprii). Cum $\varphi_0 \circ J$ are urma zero, rezultă că are două valori proprii reale de multiplicitate doi fiecare, opuse ca semn. Deci putem scrie $(\varphi_0 \circ J)^2 = \alpha^2 Id$. De fapt, are loc: $\alpha = \lambda = |\varphi_0| / \sqrt{2}$ (deoarece $|\varphi_0 \circ J|^2 = 4\alpha^2$, iar pe de altă parte $|\varphi_0 \circ J| = |\varphi_0| \, |J| = \sqrt{2} \, |\varphi_0|$), şi atunci rezultă:

$$(\varphi_0 \circ J)^2 = \lambda^2 Id.$$

De aici şi din (4.19) deducem că $\varphi_0 = -\frac{1}{2}\lambda d\sigma$ şi rezultă următoarele:

$$\varphi_0 \circ J \left(\frac{d\sigma}{2} + d\lambda \right) = -\lambda \left(\frac{d\sigma}{2} + d\lambda \right), \tag{4.20}$$

$$\varphi_0 \circ J \left(\frac{d\sigma}{2} - d\lambda \right) = \lambda \left(\frac{d\sigma}{2} - d\lambda \right). \tag{4.21}$$

Aceasta înseamnă că formele $d\xi = \frac{d\sigma}{2} + d\lambda$ şi $d\eta = \frac{d\sigma}{2} - d\lambda$, atunci când nu sunt zero, sunt forme proprii ale endomorfismului simetric $\varphi_0 \circ J$, corespunzătoare valorilor proprii $-\lambda$, respectiv λ; în particular rezultă că sunt ortogonale pe mulţimea deschisă M_0, pe care λ (*i.e.* φ_0) nu se anulează. Conform Corolarului 4.2, această mulţime, care din ipoteză nu este vidă, este densă, deci, prin continuitate, rezultă că formele $d\xi$ şi $d\eta$ sunt ortogonale peste tot pe componenta conexă respectivă. □

Observaţia 4.7. Pe mulţimea M_0, unde λ nu se anulează, avem $\varphi_0 = \lambda\omega_I$ şi (4.19) poate fi rescrisă astfel:

$$Id\sigma = 2Jd\lambda. \tag{4.22}$$

Într-adevăr, presupunând numai că φ_0 este 2-formă twistor, $\bar{\omega} = \lambda^{-3}\varphi_0$ este închisă şi pentru $\varphi = \varphi_0 + \frac{3}{2}\sigma\omega$ calculăm derivata exterioară:

$$d\varphi = d\left(\varphi_0 + \frac{3}{2}\sigma\omega\right) = 3\lambda^2 d\lambda \wedge \bar{\omega} + \frac{3}{2} d\sigma \wedge \omega = 3\left(d\lambda \wedge \omega_I + \frac{1}{2} d\sigma \wedge \omega\right).$$

Deci ecuaţia (4.22) este adevărată dacă şi numai dacă forma φ este închisă, deoarece arătăm în general echivalenţa:

$$I\alpha = J\beta \iff \beta \wedge \omega_I = -\alpha \wedge \omega_J, \tag{4.23}$$

unde α şi β sunt 1-forme, iar I, J structuri complexe care comută şi induc orientări opuse.

Necesitatea: Este suficient să arătăm egalitatea: $J(\beta \wedge \omega_I) = -J(\alpha \wedge \omega_J)$, adică $J\beta \wedge \omega_I = -J\alpha \wedge \omega_J$ (deoarece ω_I şi ω_J sunt J-invariante), ceea ce, folosind ipoteza, este echivalent cu:

$$I\alpha \wedge \omega_I = -J\alpha \wedge \omega_J.$$

Aplicăm operatorul $*$ (corespunzător orientării date de J), care este un izomorfism, şi obţinem:

$$\begin{aligned} *(I\alpha \wedge \omega_I) &= I\alpha \lrcorner * \omega_I = I\alpha \lrcorner (-\omega_I) \\ &= -J\alpha \lrcorner \omega_J = -J\alpha \lrcorner * \omega_J = *(-J\alpha \wedge \omega_J). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Suficienţa: Rezultă analog considerând implicaţiile în sens invers. Aplicând J şi apoi $*$ egalităţii din ipoteză se obţine;

$$J\beta \lrcorner \omega_I = J\alpha \lrcorner \omega_J,$$

de unde rezultă $J\beta = I\alpha$, sau, echivalent, $I\beta = J\alpha$.

5. O primă clasificare a suprafeţelor Kähler slab autoduale

Revenind la suprafeţele Kähler slab autoduale, vedem ce implicaţii au în acest caz particular rezultatele generale obţinute în secţiunea precedentă pentru orice suprafaţă Kähler care admite o 2-formă hamiltoniană.

În această secţiune (M, g, J, ω) este o suprafaţă Kähler slab autoduală şi considerăm 2-forma hamiltoniană $\varphi = \rho$, astfel încât $\varphi_0 = \rho_0$, iar urma şi pfaffianul formei normalizate asociate (care este forma Ricci normalizată, $\tilde{\rho}(\cdot, \cdot) = h(J\cdot, \cdot)$) sunt: $\sigma = s$, curbura scalară normalizată şi respectiv $\pi = p = \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}|\rho_0|^2$ şi avem evident scrierea:

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2}\rho_0 + \frac{1}{4}s\omega.$$

Considerăm următoarea definiţie[35]:

Definiţia 5.1. O metrică Kähler se numeşte *extremală* dacă curbura scalară este potenţial de olomorfie şi *biextremală* dacă atât curbura scalară (normalizată) $s = \operatorname{tr}\tilde{\rho}$, cât şi pfaffianul formei Ricci normalizate, $p = \operatorname{pf}(\tilde{\rho})$, sunt potenţiale de olomorfie.

Deoarece orice suprafaţă Kähler slab autoduală admite 2-forma hamiltoniană ρ, atunci în particular sunt adevărate rezultatele din secţiunea precedentă. Astfel din Teorema 4.1 rezultă direct:

Propozitia 5.1. *O suprafaţă Kähler slab autoduală este biextremală.*

Observaţia 5.1. Pe o suprafaţă Kähler biextremală, potenţialele de olomorfie s şi p comută automat Poisson, deoarece K_2 este câmp Killing şi o dată cu metrica păstrează toate „obiectele" care derivă direct din ea, în particular curbura scalară, deci are loc $ds(K_2) = 0$.

Observaţia 5.2. Pentru o suprafaţă Kähler slab autoduală, Teorema 4.2 implică ortogonalitatea dintre $d\xi$ şi $d\eta$, unde $s = \xi + \eta$ şi $p = \xi\eta$. Vom vedea în secţiunea următoare că este adevărat şi reciproc: o suprafaţă Kähler biextremală care satisface această condiţie de ortogonalitate este slab autoduală.

Am văzut în Corolarul 4.2 că mulţimea deschisă M_0, pe care partea fără urmă, φ_0, a unei 2-forme hamiltoniene φ este nenulă, este fie vidă, fie densă pe fiecare componentă conexă a varietăţii M. Pentru o suprafaţă Kähler slab autoduală (M, g, J, ω), forma Ricci, ρ, este hamiltoniană şi M_0 este mulţimea punctelor în care g nu este Kähler -Einstein.

[35] În anexa B dăm justificarea utilizării noţiunii de „metrică extremală", care a fost introdusă de E.Calabi în [Cal82], unde apare în mod natural ca punct critic al unei funcţionale.

Avem nevoie în continuare de următorul rezultat general observat de Derdziński în [De83]: pentru orice suprafaţă Kähler (M, g, J), a cărei curbură scalară s nu se anulează, metrica conformă $\tilde{g} = s^{-2}g$ satisface $\delta^{\tilde{g}}W^{+} = 0$; în plus, până la omotetii, este unica metrică din clasa conformă $[g]$ care are această proprietate. Aceasta rezultă din faptul că tensorul Cotton-York autodual al oricărei suprafeţe Kähler poate fi scris sub forma[36]:

$$C^{+}(X) = -W^{+}\left(\frac{ds}{s} \wedge X\right), \tag{5.1}$$

iar pe de altă parte tensorii Cotton-York autoduali ai metricilor din aceeaşi clasă conformă, g şi $f^{-2}g$, sunt legaţi prin relaţia:

$$C^{+f^{-2}g}(X) = C^{+,g}(X) + W^{+}\left(\frac{df}{f} \wedge X\right). \tag{5.2}$$

Rezultă astfel din (5.1) că tensorul Cotton-York autodual al metricii $s^{-2}g$ se anulează identic; în plus, deoarece W^{+} nu are nucleu (când curbura scalară s nu se anulează), din (5.2) rezultă că această proprietate caracterizează metrica $s^{-2}g$ până la un multiplu constant.

Utilizând acest rezultat putem demonstra următoarea lemă:

Lema 5.1. *Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler slab autoduală şi, ca mai înainte, notăm cu M_0 mulţimea deschisă unde ρ_0 nu se anulează. Atunci, pe fiecare componentă conexă a lui M_0, curbura scalară $\bar{s}$ a lui $\bar{g} = \lambda^{-2}g$ este un multiplu constant al lui λ^{-1}:*

$$\bar{s} = c\lambda^{-1},$$

unde $\lambda = \frac{|\rho_0|}{\sqrt{2}}$ este valoarea proprie pozitivă a lui Ric_0 şi c este o constantă.

Demonstraţie. Aplicăm rezultatul precedent perechii Kähler $(\bar{g}, I)$ pe mulţimea M_0 şi metricii conforme $g = \lambda^2\bar{g}$. Din ipoteză avem $\delta^{g}W^{-} = C^{-} = 0$, unde, de fapt, W^{-} este tensorul Weyl *autodual* al lui g faţă de orientarea indusă de I. Din proprietatea de unicitate menţionată, rezultă că, pe mulţimea unde $\bar{s}$ nu se anulează, g coincide cu $\bar{s}^{-2}\bar{g}$ până la o rescalare, *i.e.* $\bar{s}$ este local un multiplu constant al lui λ^{-1}. Acelaşi lucru este însă adevărat şi în interiorul mulţimii de zerouri ale lui $\bar{s}$, deci, datorită continuităţii lui $\bar{s}$ pe M_0, rezultă $\bar{s} = c\lambda^{-1}$ pentru o anumită constantă c pe fiecare componentă conexă a mulţimii M_0. □

Un rezultat global poate fi obţinut folosind curbura scalară conformă $\kappa = \bar{s}\lambda^{-2}$. Deoarece tensorul Weyl antiautodual al lui g este dat de formula: $W^{-} = \frac{3}{4}\kappa\omega_I \otimes \omega_I$, rezultă că pe mulţimea M_0, κ^2 este egal cu $|W^{-}|^2$ până la un factor numeric, deci putem extinde κ prin continuitate la închiderea mulţimii M_0. De asemenea funcţia λ este global definită şi continuă. De aici, folosind faptul că închiderea mulţimii M_0

[36] Formulele (5.1) şi (5.2) sunt demonstrate de exemplu în [De83].

este o reuniune de componente conexe ale varietăţii M, putem rescrie Lema 5.1 astfel:

Propozitia 5.2. *Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler slab autoduală. Atunci, pe fiecare componentă conexă a varietăţii M, pe care ρ_0 nu este identic nulă, curbura scalară conformă κ a perechii hermitiene (g, I) este legată de λ prin formula:*

$$\kappa\lambda^3 = c, \tag{5.3}$$

unde c este constanta din Lema 5.1. În plus, $c = 0$ dacă şi numai dacă $W^- = 0$ pe acea componentă conexă.

Această propoziţie ne dă o primă clasificare a suprafeţelor Kähler slab autoduale.

Teorema 5.1. *Fie (M, g, J, ω) suprafaţă Kähler slab autoduală conexă. Atunci:*

1. *ρ_0 este identic zero, deci (g, J) este Kähler -Einstein; sau*
2. *curbura scalară s a lui g este constantă, dar ρ_0 nu este identic zero, atunci (g, J) este local produsul Kähler a două suprafeţe Riemann de curburi constante; sau*
3. *s nu este constantă şi g este autoduală ($W^- = 0$); sau*
4. *W^- şi ρ_0 nu se anulează nicăieri, atunci metrica Kähler $(\bar{g} = \lambda^{-2}g, I)$ dată de Propoziţia 4.1 este extremală şi global definită pe M.*

Demonstraţie. Dacă curbura scalară s este constantă, atunci din (3.4), identitatea Matsumoto-Tanno, rezultă că ρ_0, deci şi forma Ricci, ρ, este paralelă. Atunci g este fie local ireductibilă şi rezultă Einstein (cazul (1)), fie (g, J) este local un produs Kähler de două suprafeţe Riemann de curburi constante (cazul (2)).

Dacă s nu este constantă, atunci ρ_0 nu este identic zero (altfel, metrica ar fi Einstein, ceea ce, în dimensiune mai mare ca 3, implică automat curbura scalară constantă) şi , conform Corolarului 4.2, mulţimea M_0, pe care ρ_0 nu se anulează, este densă în M. Din Propoziţia 5.2 ştim că produsul $\kappa\lambda^3$ este constant. Dacă această constantă este zero, atunci curbura scalară conformă κ trebuie să fie identic nulă (deoarece mulţimea unde $\lambda = |\rho_0| / \sqrt{2}$ se anulează are complementara densă), de unde rezultă $W^- = \frac{3}{4}\kappa\omega_I \otimes_0 \omega_I = 0$, *i.e.* M este autoduală (cazul (3)). Dacă constanta este nenulă, atunci κ şi λ nu se anulează în nici un punct al varietăţii M, deci $M_0 = M$ şi perechea Kähler $(\bar{g} = \lambda^{-2}g, I)$ este definită pe M. Pentru o suprafaţă Kähler slab autoduală avem $C^- = 0$ şi $W^- = \frac{3}{4}\kappa\omega_I \otimes \omega_I$ şi înlocuind în formula (2.9), obţinem că forma Bach $\tilde{B}$ este un multiplu al lui $\kappa\rho_0$, deci un multiplu al lui ω_I. Rezultă astfel că tensorul Bach al metricii $\bar{g}$ este I-invariant (deoarece tensorul Bach este conform invariant) şi , conform Propoziţiei 2.6, rezultă că $(\bar{g}, I)$ este o metrică Kähler extremală (cazul(4)). $\square$

Deoarece metricile Kähler -Einstein şi produsele Kähler de suprafeţe Riemann au fost mult studiate, în cele ce urmează vom considera cazul suprafeţelor a căror curbură scalară nu este constantă, *i.e.* cazul în care câmpul vectorial K_1 este nenul pe o mulţime deschisă densă. În Secţiunea 6.1 analizăm cazul generic, în care câmpurile Killing hamiltoniene $K_1 = J \operatorname{grad} s$ şi $K_2 = J \operatorname{grad} p$ sunt independente, iar în secţiunea 6.2 prezentăm cazul în care $K_1 \wedge K_2$ se anulează identic, dar K_1 nu este identic nul. În ambele secţiuni se obţine mai întâi o clasificare locală explicită în cazul mai general al suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană.

6. Descrierea locală a suprafeţelor Kähler slab autoduale

Această secţiune cuprinde clasificarea locală propriu-zisă a suprafeţelor Kähler slab autoduale. Vom prezenta mai întâi clasificarea în cazul mai general al suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană, iar după aceea observăm cum se reflectă aceasta în cazul suprafeţelor Kähler slab autoduale.

Am văzut deja că pe o suprafaţă Kähler, care admite o 2-formă hamiltoniană φ, în particular pe o suprafaţă Kähler slab autoduală, urma σ şi pfaffianul π ale 2-formei normalizate asociate, $\tilde{\varphi}$, sunt potenţiale de olomorfie ale câmpurilor Killing hamiltoniene $K_1 = J\,\mathrm{grad}\,\sigma$ şi $K_2 = J\,\mathrm{grad}\,\pi$ şi în plus, σ şi π comută Poisson, *i.e.* $\omega(K_1, K_2) = 0$.

Corolarul 4.1 ne spune că există trei posibilităţi pentru câmpurile vectoriale K_1 şi K_2:

(i) K_1 şi K_2 sunt liniar independente:

Acest caz îl prezentăm în continuare în secţiunea 6.1, unde introducem noţiunea de suprafaţă Kähler ortotorică (pentru care Propoziţia 6.2 ne dă descrierea locală) şi arătăm că o suprafaţă Kähler este ortotorică dacă şi numai dacă admite o 2-formă hamiltoniană ale cărei câmpuri Killing asociate sunt liniar independente (*cf.* Teorema 6.1).

(ii) K_1 şi K_2 sunt liniar dependente:

Secţiunea 6.2 conţine prezentarea acestui caz, în care suntem conduşi la introducerea noţiunii de suprafaţă de tip Calabi (pentru aceste suprafeţe Propoziţia 6.6 ne dă descrierea locală) şi arătăm că o suprafaţă Kähler este de tip Calabi dacă şi numai dacă admite o 2-formă hamiltoniană ale cărei câmpuri Killing asociate sunt liniar dependente sau este local produsul Kähler a două suprafeţe Riemann, dintre care una admite un câmp Killing (*cf.* Teorema 6.3).

(iii) K_1 şi K_2 sunt identic nule:

În cadrul general al suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană, acest caz nu conţine multă informaţie despre geometria varietăţii (este posibil ca forma φ să fie numai un multiplu al formei ω_I[37]). În cazul particular al metricilor Kähler slab autoduale, considerând drept 2-formă hamiltoniană forma Ricci, din ipoteza $K_1 = K_2 = 0$, rezultă că forma ρ este paralelă şi atunci metrica este fie Kähler - Einstein, fie local produsul Kähler a două suprafeţe Riemann de curbură constantă.

În primele două cazuri, după prezentarea descrierii locale a suprafeţelor ortotorice, respectiv de tip Calabi, deducem forma locală a metricilor suprafeţelor Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană şi cum se particularizează aceasta în cazul metricilor extremale, biextremale şi slab autoduale.

[37]Aici notaţia este ca în Secţiunea 3, unde $\varphi_0 = |\varphi_0| / \sqrt{2}\,\omega_I$.

6.1. **Cazul I: K_1 şi K_2 liniar independente.**

6.1.1. *Suprafeţe ortotorice.* Începem prin a reaminti definiţia şi descrierea locală a suprafeţelor Kähler torice, iar după aceea definim suprafeţele Kähler ortotorice.

Definiţia 6.1. O suprafaţă Kähler (de obicei compactă) (M, g, J, ω) se numeşte *torică*[38] dacă admite două câmpuri vectoriale Killing olomorfe, K_1 şi K_2, care sunt independente pe o mulţime deschisă densă şi satisfac: $\omega(K_1, K_2) = 0$.

Deoarece ne interesează geometria locală a suprafeţelor torice, vom considera în cele ce urmează K_1 şi K_2 liniar independente peste tot, iar x_1 şi x_2 aplicaţiile lor moment global definite. Condiţia $\omega(K_1, K_2) = 0$ este echivalentă cu faptul că funcţiile x_1 şi x_2 comută Poisson. De asemenea, are loc: $[K_1, K_2] = 0$, şi , deoarece câmpurile K_1, K_2, JK_1 şi JK_2 sunt olomorfe, rezultă că toate comută între ele. Rezultă astfel că distribuţiile de rang 2: Π, generată de K_1 şi K_2 şi $J\Pi$, generată de JK_1 şi JK_2, sunt integrabile conform teoremei lui Frobenius şi ortogonale, deoarece $\langle JK_1, K_2\rangle = 0$. În particular, câmpurile K_1, K_2, JK_1 şi JK_2 formează un reper. Deoarece comută între ele, rezultă că reperul dual este format din 1-forme închise[39], deci pot fi scrise astfel: dt_1, dt_2, Jdt_1, Jdt_2, unde t_1 şi t_2 sunt funcţii definite numai local şi până la o constantă aditivă. Observăm că are loc: $K_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$.

Folosind definiţia bazei duale şi faptul că x_1 şi x_2 sunt aplicaţiile moment ale câmpurilor K_1 şi respectiv K_2, adică avem $dx_i = -K_i \lrcorner \omega$, se verifică direct egalităţile următoare de 1-forme, deoarece iau aceleaşi valori pe baza $\{K_1, K_2, JK_1, JK_2\}$:

$$Jdt_1 = \frac{|K_2|^2\, dx_1 - \langle K_1, K_2\rangle dx_2}{|K_1 \wedge K_2|^2},$$
$$Jdt_2 = \frac{|K_1|^2\, dx_2 - \langle K_1, K_2\rangle dx_1}{|K_1 \wedge K_2|^2}.$$

[38]Denumirea de varietate torică este justificată de o definiţie echivalentă, care cere ca pe varietate să existe o acţiune simplectică a unui tor de dimensiune maximă (*i.e.* jumătate din dimensiunea reală a varietăţii), în cazul nostru de dimensiune 2, iar câmpurile care apar în definiţie sunt câmpurile fundamentale asociate unei baze a algebrei Lie a torului respectiv.

[39]În general, dacă $\{X_1, \ldots, X_n\}$ este un reper (local) pe o varietate n-dimensională, format din câmpuri vectoriale care comută între ele, atunci reperul dual, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, este format din 1-forme închise, după cum rezultă în continuare. Dacă α_i este o formă din reperul dual, pentru ca $d\alpha_i$ să fie zero, este suficient să se anuleze pe orice două câmpuri din reperul iniţial, X_j şi X_k. Din definiţia derivatei exterioare avem: $d\alpha_i(X_j, X_k) = X_j(\alpha_i(X_k)) - X_k(\alpha_i(X_j)) - \alpha_i([X_j, X_k])$. Deoarece câmpurile comută avem $[X_j, X_k] = 0$, iar baza fiind duală rezultă că $\alpha_i(X_j)$ şi $\alpha_i(X_k)$ sunt constante (fie 0, fie 1) şi atunci se anulează şi primii doi termeni; deci α_i este închisă pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Notând cu G_{ij} matricea 2×2 pozitiv definită şi simetrică de funcţii de două variabile (funcţiile depind numai de variabilele x_1 şi x_2, deoarece Jdt_1 şi Jdt_2 sunt 1-forme închise) care s-a format:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{|K_2|^2}{|K_1\wedge K_2|^2} & -\frac{\langle K_1,K_2\rangle}{|K_1\wedge K_2|^2} \\ -\frac{\langle K_1,K_2\rangle}{|K_1\wedge K_2|^2} & \frac{|K_2|^2}{|K_1\wedge K_2|^2} \end{pmatrix},$$

rezultă

$$Jdt_i = \sum_{j=1,2} G_{ij}dx_j \quad (i=1,2)\,,$$

iar aceste 1-forme sunt închise dacă şi numai dacă G_{ij} este hessiana unei funcţii în variabilele x_1 şi x_2, ceea ce rezultă folosind Lema lui Poincaré.

Următoarea Propoziţie[40] ne dă clasificarea explicită a suprafeţelor Kähler torice, care apare de exemplu în [Ab98] sau [Gui94].

Propozitia 6.1. *Fie G_{ij} o matrice simetrică pozitiv definită 2×2 de funcţii de două variabile x_1, x_2, cu inversa G^{ij}. Atunci metrica dată de:*

$$\sum_{i,j}(G_{ij}dx_idx_j + G^{ij}dt_idt_j)$$

este aproape-Kähler cu forma Kähler :

$$\omega = dx_1\wedge dt_1 + dx_2\wedge dt_2$$

şi are câmpurile Killing hamiltoniene independente $\partial/\partial t_1$, $\partial/\partial t_2$ cu aplicaţiile moment care comută Poisson, x_1 şi x_2.

Reciproc, orice structură aproape Kähler cu o asemenea pereche de câmpuri Killing este de această formă (unde t_i sunt definite local până la o constantă aditivă) şi este Kähler dacă şi numai dacă G_{ij} este hessiana unei funcţii de x_1 şi x_2.

Teoremele 4.1 şi 4.2 motivează introducerea următoarei definiţii:

Definiţia 6.2. O suprafaţă Kähler (M, g, J, ω) se numeşte *ortotorică* dacă admite două câmpuri vectoriale Killing hamiltoniene independente cu aplicaţiile moment care comută Poisson, $\xi\eta$ şi $\xi+\eta$, astfel încât $d\xi$ şi $d\eta$ sunt ortogonale.

Observaţia 6.1. Condiţia impusă, în definiţie, câmpurilor Killing să fie hamiltoniene este mai restrictivă, pentru studiul global, decât condiţia de a fi olomorfe, deoarece avem următoarele implicaţii: dacă X este câmp Killing hamiltonian, atunci rezultă că X este olomorf, iar reciproc există o variantă locală: dacă X este Killing şi olomorf, atunci rezultă local hamiltonian. Ambele se pot verifica folosind formula lui Cartan

[40] Dăm numai enunţul acestei propoziţii, deoarece în cazul particular care ne interesează, cel al suprafeţelor Kähler ortotorice, vom da demonstraţia completă în Propoziţia 6.2.

aplicată formei ω: $\mathcal{L}_X\omega = X\lrcorner d\omega + d(X\lrcorner\omega)$ şi faptul că, pentru un câmp Killing X, este adevărată echivalenţa: $\mathcal{L}_X\omega = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_X J = 0$.

Propoziţia care urmează ne dă clasificarea locală explicită a suprafeţelor Kähler ortotorice, care poate fi obţinută din Propoziţia 6.1 printr-o schimbare de coordonate şi impunând ortogonalitatea lui $d\xi$ şi $d\eta$. Această condiţie de ortogonalitate face ca metrica să nu depindă, ca în cazul general, de o funcţie de două variabile, ci de două funcţii de o variabilă, fapt ce simplifică rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale care intervin, deoarece acestea devin ordinare.

Propozitia 6.2. *Structura aproape hermitiană (g, J, ω) definită de:*

$$g = (\xi-\eta)\left(\frac{d\xi^2}{F(\xi)} - \frac{d\eta^2}{G(\eta)}\right) + \frac{1}{\xi-\eta}\left(F(\xi)(dt+\eta dz)^2 - G(\eta)(dt+\xi dz)^2\right), \tag{6.1}$$

$$Jd\xi = \frac{F(\xi)}{\xi-\eta}(dt+\eta dz), \qquad Jdt = -\frac{\xi d\xi}{F(\xi)} - \frac{\eta d\eta}{G(\eta)}, \tag{6.2}$$

$$Jd\eta = \frac{G(\eta)}{\eta-\xi}(dt+\xi dz), \qquad Jdz = \frac{d\xi}{F(\xi)} + \frac{d\eta}{G(\eta)}, \tag{6.3}$$

$$\omega = d\xi\wedge(dt+\eta dz) + d\eta\wedge(dt+\xi dz), \tag{6.4}$$

este o structură Kähler ortotorică pentru orice funcţii F,G de o variabilă. Reciproc, orice suprafaţă Kähler ortotorică este de această formă, unde t şi z sunt funcţii definite local până la o constantă aditivă.

Demonstraţie. (i) Forma Kähler poate fi scrisă sub forma următoare:

$$\omega = d(\xi+\eta)\wedge dt + d(\xi\eta)\wedge dz,$$

care este închisă. Verificăm prin calcul direct că $\frac{\partial}{\partial t}$ şi $\frac{\partial}{\partial z}$ sunt câmpuri Killing hamiltoniene care comută Poisson.

$$\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\omega = \frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\left(d(\xi+\eta)\wedge dt + d(\xi\eta)\wedge dz\right) = -d(\xi+\eta),$$

de unde rezultă că $\frac{\partial}{\partial t} = J\,\mathrm{grad}(\xi+\eta)$, deci câmpul $\frac{\partial}{\partial t}$ este hamiltonian cu aplicaţia moment $\xi+\eta$. Analog rezultă că şi $\frac{\partial}{\partial z}$ este câmp hamiltonian cu aplicaţia moment $\xi\eta$. În plus, aceste aplicaţii moment comută Poisson:

$$\begin{aligned}\{\xi+\eta, \xi\eta\} &= \omega(J\,\mathrm{grad}(\xi+\eta), J\,\mathrm{grad}(\xi\eta)) = \omega(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z}) \\ &= (d(\xi+\eta)\wedge dt + d(\xi\eta)\wedge dz)(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z}) = 0.\end{aligned}$$

Deoarece am văzut că $\frac{\partial}{\partial t}$ şi $\frac{\partial}{\partial z}$ sunt câmpuri hamiltoniene, a arăta că sunt Killing este echivalent cu a arăta că sunt olomorfe. De exemplu, pentru $\frac{\partial}{\partial t}$ a fi olomorf înseamnă că pentru orice câmp vectorial X, are loc $[\frac{\partial}{\partial t}, JX] = J[\frac{\partial}{\partial t}, X]$, relaţie care, conform formulei de calcul pentru paranteza Lie ($[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ pentru orice câmpuri vectoriale X, Y şi orice funcţii f, g), rezultă din egalităţile: $[\frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial t}] = 0$, $[\frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial z}] = 0$, $[\frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial \xi}] = 0$ şi $[\frac{\partial}{\partial t}, J\frac{\partial}{\partial \eta}] = 0$, care se verifică utilizând formulele (6.2) ce definesc structura J şi faptul că parantezele Lie ale câmpurilor din baza locală determinată de fixarea coordonatelor (ξ, η, t, z) se anulează, iar coeficienţii câmpurilor $J\frac{\partial}{\partial t}$, $J\frac{\partial}{\partial z}$, $J\frac{\partial}{\partial \xi}$ şi $J\frac{\partial}{\partial \eta}$ sunt funcţii numai de variabilele ξ şi η. Analog rezultă că şi câmpul $\frac{\partial}{\partial z}$ este Killing.

A rămas să arătăm că structura aproape complexă J este integrabilă. Conform Propoziţiei 2.3, este suficient să vedem că 1-formele $dt + iJdt$ şi $dz + iJdz$ sunt închise, deoarece ele formează o bază a lui $\Lambda^{1,0}M$. Dar aceasta rezultă direct astfel:

$$d(dt + iJdt) = -id\left(\frac{\xi d\xi}{F(\xi)} + \frac{\eta d\eta}{G(\eta)}\right) = 0,$$

$$d(dz + iJdz) = id\left(\frac{d\xi}{F(\xi)} + \frac{d\eta}{G(\eta)}\right) = 0.$$

Rezultă atunci că suprafaţa este Kähler ortotorică.

(ii) Reciproc, fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler ortotorică, ale cărei câmpuri Killing hamiltoniene sunt K_1 şi K_2. Deoarece câmpurile K_1, K_2, JK_1 şi JK_2 comută între ele, rezultă că baza duală este formată din 1-forme închise, deci este de forma $\{dt, dz, Jdt, Jdz\}$, unde t şi z sunt definite local până la o constantă aditivă. Dacă notăm $\xi + \eta$ şi $\xi\eta$ aplicaţiile moment pentru K_1 şi respectiv K_2, atunci rezultă că $d\xi$, $d\eta$, dt şi dz sunt 1-forme liniar independente, deci putem considera sistemul de coordonate dat de (ξ, η, t, z). Observăm că avem: $K_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ şi $K_1 = \frac{\partial}{\partial z}$.

Deoarece $(Jdz)(K_1) = 0$ şi $(Jdz)(K_2) = 0$, putem scrie:

$$Jdz = \frac{d\xi}{F} + \frac{d\eta}{G},$$

unde, deoarece Jdz este închisă, rezultă că F şi G sunt funcţii numai în variabilele ξ şi η. Din ecuaţiile:

$$0 = Jdz(JK_1) = (K_1 \lrcorner \omega)(Jdz) = -d(\xi + \eta)(Jdz) = -\langle Jdz, d\xi + d\eta \rangle,$$

$$0 = Jdz(JK_2) = (K_2 \lrcorner \omega)(Jdz) = -d(\xi\eta)(Jdz) = -\langle Jdz, \eta d\xi + \xi d\eta \rangle,$$

şi din ipoteza de ortogonalitate, $\langle d\xi, d\eta \rangle = 0$, rezultă $F = |d\xi|^2 (\xi - \eta)$ şi $G = |d\eta|^2 (\eta - \xi)$. La fel obţinem următoarea expresie pentru Jdt, unde F şi G sunt aceleaşi funcţii ca mai sus:

$$Jdt = -\frac{\xi d\xi}{F} - \frac{\eta d\eta}{G}.$$

Arătăm că din închiderea 1-formelor Jdt şi Jdz, rezultă următoarele egalităţi: $(\xi - \eta)F_\eta = 0$ şi $(\eta - \xi)G_\xi = 0$, care, deoarece $\xi \neq \eta$ (presupunând $\xi = \eta$, ar rezulta ambele constante, deoarece $d\xi$ este perpendicular pe $d\eta$, deci câmpurile K_1 şi K_2 ar fi identic nule, contradicţie cu independenţa lor din definiţie), implică $F = F(\xi)$ şi $G = G(\eta)$. Cum $J^2 = -Id$ rezultă că structura complexă J este dată de formulele (6.2). Folosind ortogonalitatea în raport cu ω a câmpurilor $K_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ şi $K_2 = \frac{\partial}{\partial z}$ şi relaţiile $K_1 \lrcorner \omega = -d(\xi + \eta)$ şi $K_2 \lrcorner \omega = -d(\xi\eta)$, rezultă că forma Kähler ω este dată de formula $\omega = d(\xi + \eta) \wedge dt + d(\xi\eta) \wedge dz$, adică de (6.4), de unde rezultă că şi expresia metricii g este dată de (6.1). □

Observaţia 6.2. Pe orice suprafaţă Kähler ortotorică (M, g, J, ω) avem o structură antiautoduală aproape complexă, I, a cărei formă Kähler , ω_I, este dată de:

$$\begin{aligned} \omega_I &= \frac{d\xi \wedge Jd\xi}{|d\xi|^2} - \frac{d\eta \wedge Jd\eta}{|d\eta|^2} \\ &= d\xi \wedge (dt + \eta dz) - d\eta \wedge (dt + \xi dz), \end{aligned} \tag{6.5}$$

sau, echivalent:

$$Id\xi = Jd\xi = \frac{F(\xi)}{\xi - \eta}(dt + \eta dz), \qquad Idt = -\frac{\xi d\xi}{F(\xi)} + \frac{\eta d\eta}{G(\eta)}, \tag{6.6}$$

$$Id\eta = -Jd\eta = -\frac{G(\eta)}{\eta - \xi}(dt + \xi dz), \quad Idz = \frac{d\xi}{F(\xi)} - \frac{d\eta}{G(\eta)}. \tag{6.7}$$

Pentru a arăta că ω_I este antiautoduală, adică $*\omega_I = -\omega_I$, este suficient să verificăm că are loc $\omega \wedge \omega = -\omega_I \wedge \omega_I$, ceea ce rezultă direct din definiţia lui ω_I:

$$\omega_I \wedge \omega_I = 2(\xi - \eta) d\xi \wedge d\eta \wedge dt \wedge dz = -\omega \wedge \omega.$$

Propozitia 6.3. *Pentru orice suprafaţă Kähler ortotorică, structura aproape hermitiană* $(\bar{g} = (\xi - \eta)^{-2} g, I)$ *este Kähler.*

Demonstraţie. Folosind acelaşi argument ca în demonstraţia Propoziţiei 6.2 (i), rezultă că structura I definită de formulele (6.6) este integrabilă, deoarece Idt şi Idz sunt închise.

Arătăm că θ, forma Lee a perechii hermitiene (g, I), care este definită prin ecuaţia: $d\omega_I = -2\theta \wedge \omega_I$, este egală cu $-d \log|\xi - \eta|$. Din definiţia formei ω_I dată de (6.5) obţinem:

$$d\omega_I = -2 d\xi \wedge d\eta \wedge dz,$$

iar pe de altă parte calculăm:

$$\begin{aligned} -d\log|\xi - \eta| \wedge \omega_I &= -\frac{(d\xi - d\eta)}{\xi - \eta} \wedge [d\xi \wedge (dt + \eta dz) - d\eta \wedge (dt + \xi dz)] \\ &= d\xi \wedge d\eta \wedge dz = -\frac{1}{2} d\omega_I, \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\theta = -d \log|\xi - \eta|\,. \tag{6.8}$$

Aceasta implică şi închiderea formei $\bar{\omega} = (\xi - \eta)^{-2}\omega_I$, astfel:

$$d\bar{\omega} = -2(\xi-\eta)^{-3}(d\xi - d\eta)\wedge\omega_I + (\xi-\eta)^{-2}(-2\theta\wedge\omega_I) = 0,$$

deci structura $(\bar{g} = (\xi-\eta)^{-2}g, I)$ este Kähler. □

Observaţia 6.3. În particular, rezultă că, pe orice suprafaţă Kähler ortotorică, tensorul Weyl antiautodual, W^-, care este tensorul Weyl *autodual* faţă de orientarea indusă de I, este dat de expresia: $W^- = \frac{3}{4}\kappa\omega_I \otimes_0 \omega_I$, unde κ este curbura scalară conformă a structurii hermitiene (g, I).

Observaţia 6.4. Deoarece pentru $i = 1, 2$ avem $d\xi(K_i) = d\eta(K_i) = 0$ şi K_i sunt Killing în raport cu metrica g, rezultă:

$$\mathcal{L}_{K_i}\left((\xi-\eta)^{-2}g\right) = -2(\xi-\eta)^{-3}(d\xi - d\eta)(K_i)g + (\xi-\eta)^{-2}\mathcal{L}_{K_i}g = 0,$$

deci câmpurile vectoriale K_1 şi K_2 sunt Killing şi în raport cu metrica $\bar{g}$. De asemenea, rezultă şi hamiltoniene în raport cu $\bar{\omega}$, cu aplicaţiile moment $-(1/\xi-\eta)$ şi respectiv $-(\xi+\eta)/(2(\xi-\eta))$, deoarece, rescriind ω_I dată de (6.5) sub forma $\omega_I = d(\xi-\eta)\wedge dt + (\eta d\xi - \xi d\eta)\wedge dz$, obţinem:

$$K_1 \lrcorner \bar{\omega} = (\xi-\eta)^{-2}\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\omega_I = -(\xi-\eta)^{-2}d(\xi-\eta) = d\left(\frac{1}{\xi-\eta}\right),$$

$$K_2 \lrcorner \bar{\omega} = (\xi-\eta)^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\lrcorner\omega_I = -(\xi-\eta)^{-2}(\eta d\xi - \xi d\eta) = d\left(\frac{\xi+\eta}{2(\xi-\eta)}\right).$$

Cu toate acestea, metrica Kähler $(\bar{g}, I)$ nu este în general ortotorică, după cum rezultă din Lema 6.1.

6.1.2. *Legătura dintre suprafeţele Kähler ortotorice şi cele care admit o 2-formă hamiltoniană.* Combinând rezultatele pe care le-am obţinut pentru suprafeţele Kähler care admit o 2-formă hamiltoniană, Teoremele 4.1 şi 4.2, cu cele referitoare la suprafeţele Kähler ortotorice, Propoziţiile 6.2 şi 6.3, rezultă următoarea echivalenţă, care dă o descriere locală explicită a oricărei suprafeţe Kähler care admite o 2-formă hamiltoniană, ale cărei câmpuri Killing asociate sunt independente:

Teorema 6.1. *O suprafaţă Kähler este ortotorică dacă şi numai dacă admite o 2-formă hamiltoniană, ale cărei câmpuri vectoriale Killing asociate sunt independente. Atunci structura Kähler este dată explicit de formulele* (6.1)-(6.4), *în care F şi G sunt două funcţii arbitrare de o variabilă.*

Demonstraţie. Dacă suprafaţa Kähler admite o 2-formă hamiltoniană, φ, atunci, conform Teoremei 4.1, există câmpurile Killing hamiltoniene K_1 şi K_2, cu aplicaţiile moment $\xi+\eta$, respectiv $\xi\eta$, care comută Poisson (folosim notaţiile ce preced enunţul Teoremei 4.2). Dacă presupunem, în plus, K_1 şi K_2 independente, rezultă $\xi \neq \eta$, sau, echivalent, $\varphi_0 \neq 0$, ceea ce, conform Teoremei 4.2, implică ortogonalitatea dintre $d\xi$ şi $d\eta$, deci suprafaţa Kähler este ortotorică.

Reciproc, dată o suprafaţă Kähler ortotorică, (M, g, J, ω), considerăm următoarea 2-formă (folosim notaţiile precedente introduse în demonstraţia Teoremei 6.2 şi în Observaţia 6.2):

$$\varphi := \frac{1}{2}(\xi - \eta)\omega_I + \frac{3}{2}(\xi + \eta)\omega. \tag{6.9}$$

Arătăm că φ este hamiltoniană şi are câmpurile Killing asociate independente. Forma φ este J-invariantă, deoarece atât ω, cât şi ω_I sunt J-invariante. Am văzut în Observaţia 6.2 că 2-forma ω_I este anti-autoduală, adică aparţine spaţiului $\Lambda^- M$, deci, dintr-o caracterizare echivalentă a acestui spaţiu pe varietăţile Kähler, este J-invariantă şi fără urmă, ceea ce implică $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\xi - \eta)\omega_I$. Deoarece φ_0 este o secţiune nenulă a lui $\Lambda^- M$, din Propoziţia 4.1 rezultă că φ_0 este 2-formă twistor dacă şi numai dacă perechea $(4(\xi - \eta)^{-2} g, I)$ este Kähler, ceea ce este adevărat, conform Propoziţiei 6.3. Pentru ca φ să rezulte 2-formă hamiltoniană, mai trebuie să verificăm că este închisă. Folosind faptul că ω şi $\bar{\omega} = (\xi - \eta)^{-2}\omega_I$ sunt închise, rezultă:

$$\begin{aligned} d\varphi &= d\left(\frac{1}{2}(\xi - \eta)\omega_I + \frac{3}{2}(\xi + \eta)\omega\right) = \frac{1}{2} d\left((\xi - \eta)^3 \bar{\omega}\right) + \frac{3}{2} d(\xi + \eta) \wedge \omega \\ &= \frac{3}{2}\left[d(\xi - \eta) \wedge \omega_I + d(\xi + \eta) \wedge \omega\right]. \end{aligned}$$

Deci $d\varphi = 0$ dacă şi numai dacă $d(\xi - \eta) \wedge \omega_I = -d(\xi + \eta) \wedge \omega$, egalitate care, conform (4.23) este echivalentă cu $Id(\xi + \eta) = Jd(\xi - \eta)$, relaţie adevărată datorită definiţiei structurii complexe I: $Id\xi = Jd\xi$ şi $Id\eta = -Jd\eta$.

Forma $\tilde{\varphi}$ asociată 2-formei φ este dată de:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\omega,$$

unde am notat $\sigma = \xi + \eta$; rezultă $\mathrm{tr}(\tilde{\varphi}) = \sigma = \xi + \eta$ şi $\mathrm{pf}(\tilde{\varphi}) = \frac{\sigma^2}{4} - \lambda^2 = \xi\eta$. Deci câmpurile Killing asociate 2-formei hamiltoniene φ sunt chiar câmpurile vectoriale K_1 şi K_2 din definiţia varietăţii ortotorice, care sunt independente. Ultima afirmaţie din enunţul teoremei este o consecinţă directă a Propoziţiei 6.2. □

6.1.3. *Descrierea locală a suprafeţelor Kähler slab autoduale pentru care câmpurile Killing hamiltoniene K_1 şi K_2 sunt liniar independente.* În continuare vedem cum se particularizează formulele (6.1)-(6.4), care dau expresia locală explicită a unei suprafeţe Kähler ortotorice, în cazul special al suprafeţelor Kähler slab autoduale. Mai întâi calculăm curbura unei suprafeţe Kähler ortotorice şi cu ajutorul ei stabilim forma particulară pe care o iau formulele generale (6.1)-(6.4) în cazul suprafeţelor Kähler extremale şi respectiv biextremale. Aceasta din urmă reprezintă expresia locală şi pentru suprafeţele Kähler slab autoduale, deoarece are loc un fel de reciprocă a Teoremei 4.2 şi a Propoziţiei 5.1, care ne asigură că o suprafaţă Kähler biextremală şi ortotorică este slab autoduală.

În general, tensorul de curbură al unei varietăţi riemanniene de dimensiune mai mare sau egală cu 4 se descompune în trei părţi, aşa cum este prezentat în Anexa A. Astfel rezultă că întreaga informaţie despre curbură este conţinută în curbura scalară, *scal*, forma Ricci primitivă, ρ_0, şi tensorul Weyl, W. În cazul dimensiunii 4, tensorul Weyl se descompune în partea sa autoduală, W^+ şi antiautoduală, W^-, care, în cazul particular al suprafeţelor Kähler ortotorice, după cum am văzut în Observaţia 6.3, sunt determinate de curbura scalară normalizată, s, şi respectiv de curbura scalară conformă a structurii hermitiene (g, I), κ, prin formulele:

$$W^+ = \frac{3}{4} s\omega \otimes_0 \omega, \tag{6.10}$$

$$W^- = \frac{3}{4} \kappa\omega_I \otimes_0 \omega_I, \tag{6.11}$$

de unde rezultă că pentru suprafeţele Kähler ortotorice tensorul de curbură este complet determinat de curbura scalară, de forma Ricci fără urmă şi de curbura scalară conformă a structurii hermitiene (g, I). Următoarea lemă ne dă formulele pentru aceste mărimi, pornind de la forma explicită a structurii unei suprafeţe Kähler ortotorice, dată de (6.1)-(6.4):

Lema 6.1. *Pentru orice suprafaţă Kähler ortotorică (M, g, J, ω), ρ_0 este un multiplu μ al formei Kähler ω_I a structurii hermitiene (g, I) şi μ,s,κ sunt daţi de:*

$$\mu = \frac{F'(\xi) - G'(\eta)}{2(\xi - \eta)^2} - \frac{F''(\xi) + G''(\eta)}{4(\xi - \eta)}, \tag{6.12}$$

$$s = -\frac{F''(\xi) - G''(\eta)}{6(\xi - \eta)}, \tag{6.13}$$

$$\kappa = -\frac{F''(\xi) - G''(\eta)}{6(\xi - \eta)} + \frac{F'(\xi) + G'(\eta)}{(\xi - \eta)^2} - \frac{F(\xi) - G(\eta)}{(\xi - \eta)^3}. \tag{6.14}$$

În particular, pe mulţimea deschisă a lui M, pe care μ nu se anulează, structura aproape complexă antiautoduală definită de ρ_0 este egală cu I.

Demonstraţie. Din (6.4) rezultă că forma volum a metricii g este dată de formula următoare:

$$vol_g = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega = -(\xi - \eta) d\xi \wedge d\eta \wedge dt \wedge dz.$$

Dacă notăm $vol_0 = dt \wedge Jdt \wedge dz \wedge Jdz$, rezultă că forma Ricci este dată de:

$$\rho = -\frac{1}{2} dJd \log(vol_g/vol_0).$$

Calculăm vol_0 folosind definiţia structurii complexe J dată de (6.2):

$$\begin{aligned} vol_0 &= dt \wedge \left(-\frac{\xi d\xi}{F(\xi)} - \frac{\eta d\eta}{G(\eta)} \right) \wedge dz \wedge \left(\frac{d\xi}{F(\xi)} + \frac{d\eta}{G(\eta)} \right) \\ &= \frac{\xi - \eta}{F(\xi)G(\eta)} d\xi \wedge d\eta \wedge dt \wedge dz, \end{aligned}$$

de unde rezultă $vol_g/vol_0 = -F(\xi)G(\eta)$, ceea ce implică:

$$\rho = -\frac{1}{2} dJd \log |F(\xi)| - \frac{1}{2} dJd \log |G(\eta)| . \tag{6.15}$$

Calculăm pe rând cei doi termeni pentru a determina forma Ricci.

$$\begin{aligned} dJd \log |F(\xi)| &= dJ(\frac{F'(\xi)}{F(\xi)} d\xi) = d \left(\frac{F'(\xi)}{\xi - \eta} (dt + \eta dz) \right) \\ &= \left(\frac{F''(\xi)(\xi - \eta) - F'(\xi)}{(\xi - \eta)^2} d\xi + \frac{F'(\xi)}{(\xi - \eta)^2} d\eta \right) \wedge (dt + \eta dz) \\ &\quad + \frac{F'(\xi)}{\xi - \eta} d\eta \wedge dz \\ &= \frac{F''(\xi)}{\xi - \eta} d\xi \wedge (dt + \eta dz) - \frac{F'(\xi)}{(\xi - \eta)^2} d\xi \wedge (dt + \eta dz) \\ &\quad + \frac{F'(\xi)}{(\xi - \eta)^2} d\eta \wedge (dt + \xi dz) \\ &= \frac{F''(\xi)}{\xi - \eta} d\xi \wedge (dt + \eta dz) - \frac{F'(\xi)}{(\xi - \eta)^2} \omega_I. \end{aligned}$$

Analog obţinem:

$$dJd \log |G(\eta)| = \frac{G''(\eta)}{\eta - \xi} d\eta \wedge (dt + \xi dz) + \frac{G'(\eta)}{(\eta - \xi)^2} \omega_I.$$

Înlocuind ultimile două relaţii în (6.15) rezultă:

$$\rho = \left[\frac{F'(\xi) - G'(\eta)}{2(\xi - \eta)^2} - \frac{F''(\xi) + G''(\eta)}{4(\xi - \eta)} \right] \omega_I + \frac{3}{2} \left[-\frac{F''(\xi) - G''(\eta)}{6(\xi - \eta)} \right] \omega,$$

de unde, deoarece ω_I este fără urmă, rezultă că primul termen este ρ_0 şi astfel obţinem expresiile din enunţ pentru μ şi s.

Reamintim că am definit curbura scalară conformă a structurii hermitiene (g, I) în (4.8) ca fiind: $\kappa = s + \delta\theta - |\theta|^2$, unde θ este forma Lee, care în acest caz este dată, conform (6.8), de: $\theta = -d \log |\xi - \eta|$.

Pentru această expresie a formei Lee calculăm în continuare $|\theta|^2$ şi $\delta\theta$.

$$\begin{aligned}|\theta|^2 &= \frac{1}{(\xi-\eta)^2}\,|d\xi - d\eta|^2 = \frac{1}{(\xi-\eta)^2}(|d\xi|^2 + |d\eta|^2)\\ &= \frac{F(\xi)-G(\eta)}{(\xi-\eta)^3}.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Notând tot cu g metrica indusă pe spaţiul cotangent de metrica g definită de (6.1), am folosit pentru a obţine ultima egalitate de mai sus faptul că, pentru această definiţie a metricii g, 1-formele $d\xi$ şi $d\eta$ sunt perpendiculare: $g(d\xi, d\eta) = 0$ şi au normele: $|d\xi|^2 = g(d\xi, d\xi) = \frac{F(\xi)}{\xi-\eta}$, $|d\eta|^2 = g(d\eta, d\eta) = \frac{G(\eta)}{\eta-\xi}$.

$$\delta\theta = -\delta\left(\frac{1}{\xi-\eta}d\xi - \frac{1}{\xi-\eta}d\eta\right) = -\frac{\Delta(\xi-\eta)}{\xi-\eta}.\tag{6.17}$$

Folosind pentru laplacianul unei funcţii reale f definită pe o varietate Kähler formula (2.8), obţinem:

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= -\langle dJd\xi, \omega\rangle = -\langle d\left(\frac{F(\xi)}{\xi-\eta}(dt+\eta dz)\right), \omega\rangle\\ &= -\langle \frac{F'(\xi)}{\xi-\eta}d\xi\wedge(dt+\eta dz) - \frac{F(\xi)}{(\xi-\eta)^2}\omega_I, \omega\rangle\\ &= -\langle \frac{F'(\xi)}{2(\xi-\eta)}(\omega+\omega_I) - \frac{F(\xi)}{(\xi-\eta)^2}\omega_I, \omega\rangle\\ &= -\frac{F'(\xi)}{2(\xi-\eta)}\langle\omega,\omega\rangle = -\frac{F'(\xi)}{\xi-\eta}.\end{aligned}\tag{6.18}$$

Penultima egalitate rezultă din faptul că ω_I este antiautoduală, conform Observaţiei 6.2, iar ω este autoduală, deci sunt perpendiculare în raport cu produsul scalar indus de g pe spaţiul 2-formelor: $\langle\omega_I, \omega\rangle = 0$. Pe de altă parte, am folosit $d\xi\wedge(dt+\eta dz) = \frac{1}{2}(\omega+\omega_I)$, relaţie care rezultă direct din defin ţia formelor ω şi ω_I. Analog se obţine:

$$\Delta\eta = -\frac{G'(\eta)}{\eta-\xi},$$

de unde, înlocuind în (6.17) rezultă:

$$\delta\theta = \frac{F'(\xi)+G'(\eta)}{(\xi-\eta)^2}.\tag{6.19}$$

Înlocuind (6.16), (6.19) şi formula obţinută pentru s în definiţia curburii scalare conforme κ rezultă:

$$\kappa = -\frac{F''(\xi)-G''(\eta)}{6(\xi-\eta)} + \frac{F'(\xi)+G'(\eta)}{(\xi-\eta)^2} - \frac{F(\xi)-G(\eta)}{(\xi-\eta)^3}.$$

□

Cu ajutorul acestei leme putem stabili acum care este forma particulară pe care o iau în cazul suprafeţelor Kähler ortotorice extremale funcţiile F şi G, care descriu structura locală a unei suprafeţe Kähler ortotorice prin formulele (6.1)-(6.4).

Propozitia 6.4. *O suprafaţă Kähler ortotorică M este extremală dacă şi numai dacă F şi G sunt de forma:*

$$F(x) = kx^4 + lx^3 + Ax^2 + B_1x + C_1, \tag{6.20}$$

$$G(x) = kx^4 + lx^3 + Ax^2 + B_2x + C_2, \tag{6.21}$$

unde k, l, A, B_i şi C_i sunt constante reale. În acest caz, curbura scalară (normalizată) este dată de:

$$s = -2k(\xi + \eta) - l, \tag{6.22}$$

iar $(\bar{g} = (\xi - \eta)^{-2}g, I)$ este de asemenea o metrică Kähler extremală. În plus, M este:

- *Bach-plată dacă şi numai dacă $4k(C_1 - C_2) = (B_1 - B_2)l$;*
- *de curbură scalară constantă dacă şi numai dacă $k = 0$;*
- *de curbură scalară nulă (*i.e. *antiautoduală) dacă şi numai dacă $k = l = 0$.*

Demonstraţie. Fie M o suprafaţă Kähler ortotorică extremală, a cărei structură locală o putem presupune dată de formulele (6.1)-(6.4). Din definiţia suprafeţei extremale avem că s, curbura scalară, este potenţial de olomorfie, ceea ce, conform Observaţiei 2.1, este echivalent cu faptul că $J \operatorname{grad} s$ este câmp Killing. Din lema precedentă ştim că s este o funcţie care depinde de variabilele ξ şi η, *cf.* (6.13), de unde, folosind definiţia structurii complexe J dată de (6.2), rezultă că $J \operatorname{grad} s$ aparţine spaţiului generat de câmpurile Killing $K_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ şi $K_2 = \frac{\partial}{\partial z}$ şi comută cu ele: $[J \operatorname{grad} s, K_1] = [J \operatorname{grad} s, K_2] = 0$, deoarece funcţiile coordonate ale câmpului $J \operatorname{grad} s$ depind numai de variabilele ξ şi η. În general, o combinaţie liniară de câmpuri Killing este câmp Killing dacă şi numai dacă coeficienţii combinaţiei sunt funcţii constante, după cum am arătat în Observaţia 2.1. Astfel, rezultă că $J \operatorname{grad} s$ este o combinaţie cu coeficienţi constanţi a câmpurilor K_1 şi K_2, ceea ce, ţinând cont de forma câmpurilor Killing: $K_1 = J \operatorname{grad}(\xi + \eta)$ şi $K_2 = J \operatorname{grad}(\xi\eta)$ (aceste egalităţi au fost arătate la sfârşitul demonstraţiei Propoziţiei 6.2), este echivalent cu faptul că $\operatorname{grad} s$ este o combinaţie cu coeficienţi constanţi a câmpurilor $\operatorname{grad}(\xi + \eta)$ şi $\operatorname{grad}(\xi\eta)$, adică s este de forma:

$$s = a(\xi + \eta) + b\xi\eta + c,$$

unde a, b şi c sunt constante. Din (6.13) rezultă:

$$F''(\xi) - G''(\eta) = -6a(\xi^2 - \eta^2) - 6ab\xi\eta(\xi - \eta) - 6c(\xi - \eta),$$

ceea ce implică că F şi G sunt polinoame de grad cel mult 4 şi au coeficienţii primilor trei termeni de grad maxim egali, adică obţinem

(6.20) şi (6.21), de unde rezultă imediat din (6.13) că $s = -2k(\xi+\eta)-l$. Folosind formula dată de (2.10) pentru 2-forma antiautoduală asociată tensorului Bach al unei suprafeţe Kähler ortotorice extremale, vom arăta că:

$$\tilde{B} = \frac{4k(C_1 - C_2) - (B_1 - B_2)l}{2(\xi - \eta)^2}\omega_I, \tag{6.23}$$

de unde rezultă echivalenţa din enunţ pentru suprafeţe Kähler ortotorice extremale Bach-plate, precum şi faptul că B este I-invariant, ceea ce, conform Propoziţiei 2.6, implică faptul că şi metrica Kähler $(\bar{g}, I)$ este extremală.

Pentru a finaliza demonstraţia trebuie să arătăm formula anunţată pentru $\tilde{B}$ şi anume (6.23). Conform (2.10) avem:

$$\tilde{B} = (dJds)_0 + s\rho_0,$$

ceea ce, conform Lemei 6.1, este echivalent cu:

$$\tilde{B} = (dJds)_0 + s\mu\omega_I. \tag{6.24}$$

Din (6.13) rezultă: $ds = -2k(\xi + \eta)$, deci $(dJds)_0 = -2k(dJd\xi + dJd\eta)_0$. Pe de altă parte, în (6.18), am obţinut în particular următoarea expresie pentru $dJd\xi$:

$$dJd\xi = \frac{F'(\xi)}{2(\xi - \eta)}\omega + \left[\frac{F'(\xi)}{2(\xi - \eta)} - \frac{F(\xi)}{(\xi - \eta)^2}\right]\omega_I.$$

Analog obţinem:

$$dJd\eta = \frac{G'(\eta)}{2(\eta - \xi)}\omega + \left[\frac{G'(\eta)}{2(\xi - \eta)} + \frac{G(\eta)}{(\xi - \eta)^2}\right]\omega_I,$$

de unde, datorită faptului că ω_I este antiautoduală (*cf.* Observaţia 6.2), adică fără urmă şi J-invariantă, rezultă:

$$(dJds)_0 = -2k\left(\frac{F'(\xi) + G'(\eta)}{2(\xi - \eta)} - \frac{F(\xi) - G(\eta)}{(\xi - \eta)^2}\right)\omega_I.$$

Înlocuind această formulă şi expresia coeficientului μ dată de (6.12) în (6.24) obţinem printr-un calcul direct formula (6.23). $\square$

Observaţia 6.5. Pentru $k \neq 0$, Propoziţia 6.4 ne dă exemple de suprafeţe Kähler extremale care nu au curbura scalară constantă.

Pentru $k \neq 0$ şi $4(C_1 - C_2) = (B_1 - B_2)l/k$ se obţin exemple de suprafeţe Kähler Bach-plate, a căror curbură scalară este neconstantă. Aceste metrici nu sunt antiautoduale (conform formulei (6.10) pentru W^+ pe suprafeţe Kähler ortotorice), iar pentru $B_1 \neq B_2$ nu sunt nici autoduale (conform Propoziţiei 6.5 şi a faptului că orice suprafaţă Kähler autoduală, fiind în particular slab autoduală, este biextremală). Conform Propoziţiei 2.7 metrica $\tilde{g} = (2k(\xi+\eta)+l)^{-2}g$, care este definită pe mulţimea deschisă unde $2k(\xi+\eta)+l \neq 0$, este Einstein, iar structura

$(\tilde{g}, J)$ este hermitiană non-Kähler ($d(s^{-2}\omega) = -2s^{-3}ds \wedge \omega \neq 0$, pentru că s nu este constantă).

În continuare vedem ce formă particulară iau în cazul suprafeţelor Kähler ortotorice biextremale polinoamele F şi G obţinute în Propoziţia 6.4. Va rezulta în particular şi descrierea locală explicită pentru suprafeţele Kähler slab autoduale, ale căror câmpuri Killing asociate sunt liniar independente, deoarece, conform Propoziţiei 5.1 şi echivalenţei stabilite în Teorema 6.1, acestea sunt suprafeţe Kähler ortotorice biextremale. De fapt, din propoziţia următoare, datorită formei explicite a structurii Kähler, va rezulta că este adevărat şi un fel de reciprocă: o suprafaţă Kähler ortotorică biextremală este slab autoduală.

Propozitia 6.5. *O suprafaţă Kähler ortotorică M este biextremală dacă şi numai dacă F şi G sunt de forma:*

$$F(x) = kx^4 + lx^3 + Ax^2 + Bx + C_1, \tag{6.25}$$

$$G(x) = kx^4 + lx^3 + Ax^2 + Bx + C_2. \tag{6.26}$$

În acest caz forma Ricci este dată de:

$$\rho = -2k\varphi - \frac{3}{2}l\omega,$$

unde φ este 2-forma hamiltoniană a structurii ortotorice dată de (6.9): $\varphi = \frac{1}{2}(\xi - \eta)\omega_I + \frac{3}{2}(\xi + \eta)\omega$. Deci M este slab autoduală şi este:

- *autoduală dacă şi numai dacă $C_1 = C_2$;*
- *Kähler -Einstein dacă şi numai dacă $k = 0$;*
- *Ricci-plată dacă şi numai dacă $k = l = 0$.*

Demonstraţie. Deoarece o suprafaţă biextremală este în particular extremală, putem aplica Propoziţia 6.4 şi obţinem că forma structurii Kähler ortotorice extremale este dată de polinoamele F şi G.[41] În continuare impunem cealaltă condiţie din definiţia unei metrici Kähler biextremale şi anume ca pfaffianul formei Ricci normalizate să fie potenţial de olomorfie. Reamintim că forma Ricci normalizată este dată de formula: $\tilde{\rho} = \frac{1}{2}\rho_0 + \frac{1}{4}s\omega$ şi, conform (4.12), pfaffianul ei este:

$$p = \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}|\rho_0|^2. \tag{6.27}$$

Calculăm p folosind formulele din Lema 6.1, care sunt adevărate pentru orice suprafaţă Kähler ortotorică:

$$\mu = -k(\xi - \eta) + \frac{B_1 - B_2}{2(\xi - \eta)^2}, \tag{6.28}$$

de unde rezultă:

$$|\rho_0|^2 = |\mu\omega_I|^2 = 2\left[-k(\xi - \eta) + \frac{B_1 - B_2}{2(\xi - \eta)^2}\right].$$

[41] Păstrăm aici notaţiile introduse în demonstraţia Propoziţiei 6.4.

Înlocuind această formulă şi formula pentru s dată de (6.22) în (6.27), obţinem:

$$p = 4k^2\xi\eta + kl(\xi+\eta) + \frac{l^2}{4} + k\frac{B_1 - B_2}{\xi - \eta} - \frac{(B_1 - B_2)^2}{4(\xi-\eta)^4}. \tag{6.29}$$

Acelaşi argument folosit în demonstraţia Propoziţiei 6.4 pentru curbura scalară s, ne spune că p este potenţial de olomorfie dacă şi numai dacă există constantele reale a, b şi c astfel încât $p = a(\xi+\eta) + b\xi\eta + c$, ceea ce, conform formulei (6.29), este echivalent cu $B_1 = B_2$, de unde rezultă forma din enunţ a polinoamelor F şi G. Din condiţia $B_1 = B_2$ şi (6.28) rezultă $\mu = -k(\xi - \eta)$, deci $\rho_0 = \mu\omega_I = -k(\xi-\eta)\omega_I$. Folosind această expresie obţinută pentru ρ_0 şi fomula lui s dată de (6.22), obţinem:

$$\rho = \rho_0 + \frac{3}{2}s\omega = -k(\xi-\eta)\omega_I + \frac{3}{2}[-2k(\xi+\eta) - l]\omega = -2k\varphi - \frac{3}{2}l\omega,$$

unde φ este 2-forma hamiltoniană asociată structurii ortotorice, conform Teoremei 6.1, şi dată de (6.9): $\varphi = \frac{1}{2}(\xi-\eta)\omega_I + \frac{3}{2}(\xi+\eta)\omega$. Cum φ este 2-formă hamiltoniană, iar adăugarea unui multiplu al formei Kähler ω nu modifică această proprietate, rezultă că şi forma Ricci ρ este 2-formă hamiltoniană, deci ρ_0 este 2-formă twistor şi, conform Propoziţiei 4.2, M este slab autoduală.

Condiţia de autodualitate, $W^- = 0$, este echivalentă cu anularea curburii scalare conforme, κ, *cf.* (6.11). Înlocuind în formula lui κ dată de (6.14) forma particulară pe care am obţinut-o pentru polinoamele F şi G, avem:

$$\kappa = -\frac{C_1 - C_2}{(\xi-\eta)^3},$$

deci M este autoduală dacă şi numai dacă $C_1 = C_2$.

M este Einstein dacă şi numai dacă $\rho_0 = 0$, ceea ce este echivalent cu anularea coeficientului k (deoarece am văzut că forma Ricci fără urmă este dată de formula: $\rho_0 = -k(\xi-\eta)\omega_I$).

Cum forma Ricci este $\rho = -2k\varphi - \frac{3}{2}l\omega$, rezultă şi ultima echivalenţă din enunţ: M este Ricci-plată dacă şi numai dacă $k = l = 0$. $\square$

Observaţia 6.6. Pentru $k \neq 0$, printr-o schimbare afină a coordonatelor ξ şi η, putem presupune $k = -\frac{1}{2}$ şi $l = 0$. În acest caz $\rho = \varphi$, deci reducerea ortotorică este definită de forma Ricci. Însă nu orice suprafaţă Kähler slab autoduală poate fi adusă la forma ortotorică; de exemplu metricile Kähler slab autoduale care aparţin familiei de metrici extremale de coomogenitate 1 considerate de Calabi (*cf.* Anexa B) nu sunt în general ortotorice, deoarece K_1 şi K_2 sunt coliniare[42].

Pe de altă parte, exemplele din Propoziţia 6.5 în care $k = 0$ arată că între metricile Kähler-Einstein (care sunt slab autoduale şi au câmpurile Killing asociate identic nule) există unele care pot fi aduse la forma

[42] Acest caz este studiat în secţiunea următoare, 6.2.

ortotorică, deoarece, chiar dacă ρ nu defineşte o reducere ortotorică, există o altă 2-formă hamiltoniană şi anume $\varphi = \frac{1}{2}(\xi-\eta)\omega_I + \frac{3}{2}(\xi+\eta)\omega$.

Punând laolaltă rezultatele deja stabilite pentru suprafeţele Kähler slab autoduale, putem enunţa următoarea teoremă, care ne dă forma locală explicită a acestora, în cazul în care câmpurile Killing asociate sunt liniar independente:

Teorema 6.2. *Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler slab autoduală. Notăm cu s, λ, $p = ((s/2)+\lambda)((s/2)-\lambda)$, curbura scalară (normalizată), valoarea proprie pozitivă a tensorului Ricci fără urmă, Ric_0 şi respectiv pfaffianul tensorului Ricci normalizat. Atunci:*

(1) *$K_1 = J\,\mathrm{grad}\, s$ şi $K_2 = J\,\mathrm{grad}\, p$ sunt câmpuri vectoriale Killing care comută şi , pe orice submulţime deschisă simplu conexă pe care K_1 şi K_2 sunt liniar independente, funcţiile $\xi\colon = (s/2)+\lambda$, $\eta\colon = (s/2)-\lambda$, t, z (unde $K_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ şi $K_2 = \frac{\partial}{\partial z}$) formează un sistem de coordonate global definit faţă de care structura Kähler (g, J, ω) este:*

(6.30)
$$g = (\xi-\eta)\left(\frac{d\xi^2}{F(\xi)} - \frac{d\eta^2}{G(\eta)}\right) + \frac{1}{\xi-\eta}\left(F(\xi)(dt+\eta dz)^2 - G(\eta)(dt+\xi dz)^2\right),$$

$$Jd\xi = \frac{F(\xi)}{\xi-\eta}(dt+\eta dz), \qquad Jdt = -\frac{\xi d\xi}{F(\xi)} - \frac{\eta d\eta}{G(\eta)}, \tag{6.31}$$

$$Jd\eta = \frac{G(\eta)}{\eta-\xi}(dt+\xi dz), \qquad Jdz = \frac{d\xi}{F(\xi)} + \frac{d\eta}{G(\eta)}, \tag{6.32}$$

$$\omega = d\xi\wedge(dt+\eta dz) + d\eta\wedge(dt+\xi dz), \tag{6.33}$$

unde F şi G sunt polinoamele următoare:

$$F(x) = kx^4 + lx^3 + Ax^2 + Bx + C_1, \tag{6.34}$$

$$G(x) = kx^4 + lx^3 + Ax^2 + Bx + C_2. \tag{6.35}$$

(2) *Reciproc, orice structură aproape Kähler (g, J, ω) descrisă de (6.30)-(6.33) este Kähler slab autoduală cu:*

$$s = -2k(\xi+\eta) - l, \quad p = 4k^2\xi\eta + kl(\xi+\eta) + \frac{l^2}{4},$$

astfel încât $K_1 = \partial/\partial t$ şi $K_2 = \partial/\partial z$.

(3) *Structura Kähler descrisă de (6.30)-(6.33) este autoduală dacă şi numai dacă $C_1 = C_2$.*

6.2. **Cazul II: K_1 şi K_2 liniar dependente.** Această secţiune cuprinde clasificarea suprafeţelor Kähler slab autoduale în cazul în care câmpurile Killing asociate[43], $K_1 = J\,\mathrm{grad}\, s$ şi $K_2 = J\,\mathrm{grad}\, p$, sunt dependente, dar nu ambele identic nule. Aceasta este echivalent cu faptul că funcţiile s şi p sunt dependente şi curbura scalară nu este constantă.

La fel ca în secţiunea anterioară (unde am văzut clasificarea în cazul în care s şi p sunt independente), vom analiza mai întâi cazul mai general al unei suprafeţe Kähler (M, g, J, ω) ce admite o 2-formă hamiltoniană $\varphi = \varphi_0 + \frac{3}{2}\sigma\omega$, astfel încât câmpurile Killing asociate sunt dependente, dar nu ambele identic nule[44], *i.e.* $K_1 := J\,\mathrm{grad}\,\sigma \neq 0$ şi $K_2 := J\,\mathrm{grad}\,\pi = bK_1$, unde π este pfaffianul formei $\tilde{\varphi} := \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\omega$ şi b este în mod necesar o constantă[45].

Teoria generală a suprafeţelor Kähler cu o 2-formă hamiltoniană descrisă în secţiunea 4 se aplică şi în acest caz. În particular, deoarece K_1 nu se anulează nicăieri, putem scrie ca şi înainte $\sigma = \xi + \eta$ şi $\pi = \xi\eta$ pentru urma şi pfaffianul formei $\tilde{\varphi}$, iar din Teorema 4.2 rezultă că $d\xi$ şi $d\eta$ sunt ortogonale[46].

Pe de altă parte, construcţiile din secţiunea 6.1 nu mai sunt valabile, deoarece K_1 şi K_2 nu mai sunt independente: $K_2 = bK_1$, sau, echivalent, π este o funcţie afină de σ: $\pi = b\sigma + c$ (b şi c sunt constante reale), deci ξ şi η nu mai sunt funcţii independente şi de aceea nu mai pot fi folosite drept coordonate (locale). Rezultă că 1-formele $d\xi$ şi $d\eta$ sunt coliniare, dar am văzut că sunt şi ortogonale, ceea ce înseamnă că una dintre ele este identic zero, adică fie ξ, fie η este constantă. Deoarece $\pi = \xi(\sigma - \xi) = \eta(\sigma - \eta)$, rezultă că această constantă este constanta b de mai sus, astfel încât avem: $\pi = b(\sigma - b)$ şi $\lambda := \frac{1}{2}(\xi - \eta) = \pm\frac{1}{2}(\sigma - 2b)$.

Arătăm că endomorfismul $-\varphi_0 \circ J$ are vectorul propriu K_1, corespunzător valorii proprii λ, *i.e.* $-(\varphi_0 \circ J)(K_1) = \lambda K_1$. Din relaţiile (4.20) şi (4.21) obţinute în demonstraţia Teoremei 4.2 şi din egalitatea $\lambda = \pm\frac{1}{2}(\sigma - 2b)$, rezultă $-(\varphi_0 \circ J)(d\sigma) = \lambda d\sigma$, de unde, deoarece

[43] Păstrăm notaţiile anterioare: s este curbura scalară normalizată şi p este pfaffianul formei Ricci normalizate.

[44] Conform demonstraţiei Corolarului 4.1, K_1 identic nul implică şi K_2 identic nul, deci condiţia ca ambele câmpuri Killing să nu fie identic nule este echivalentă cu faptul că unul dintre ele nu este identic nul, şi anume K_1. În aceste condiţii (K_1 nu este identic nul), deoarece $K_1^{1,0} = K_1 - iJK_1$ este câmp vectorial olomorf (tot conform Corolarului 4.1), rezultă că, local, putem presupune câmpul vectorial K_1 nicăieri nul, adică fără puncte critice.

[45] Deoarece câmpurile K_1 şi K_2 sunt Killing, avem un caz particular al Observaţiei 2.1, din care rezultă că funcţia b trebuie să fie constantă.

[46] Ipoteza din Teorema 4.2 care asigură ortogonalitatea dintre $d\xi$ şi $d\eta$ este ca pe respectiva componentă conexă a varietăţii M, forma φ_0 să nu fie identic nulă. Această ipoteză este îndeplinită deoarece am presupus K_1 nicăieri nul: dacă prin absurd, φ_0 ar fi identic nulă, ar rezulta că σ este constantă, deci $K_1 = J\,\mathrm{grad}\,\sigma$ ar fi identic nul, contradicţie.

$K_1 = J \operatorname{grad} \sigma$ şi endomorfismul φ_0 comută[47] cu J, avem:

$$-(\varphi_0 \circ J)(K_1) = \lambda K_1. \tag{6.36}$$

Propoziţia 4.1 ne asigură existenţa unei structuri conforme Kähler $(\lambda^{-2} g, I)$ pe orice suprafaţă Kähler care admite o 2-formă hamiltoniană φ astfel încât $\varphi_0 \neq 0$, condiţie care am văzut că este adevărată în cazul $K_1 \neq 0$. Avem $\varphi_0 = \lambda \omega_I$, deci 2-forma φ_0, văzută ca endomorfism al fibratului TM, se identifică cu λI şi atunci relaţia (6.36) ne spune că $(I \circ J)(K_1) = -K_1$, de unde rezultă:

$$I(J(K_1)) = J(J(K_1)). \tag{6.37}$$

Proprietatea 2-formei φ_0 de a fi J-invariantă este echivalentă cu proprietatea endomorfismului asociat, λI, de a comuta cu J, deci din (6.37) rezultă şi :

$$I(K_1) = J(K_1). \tag{6.38}$$

Fie X un câmp vectorial nenul care aparţine distribuţiei perpendiculare pe K_1 şi JK_1: $X \in \langle K_1, JK_1 \rangle^\perp$ şi pe care îl putem presupune unitar: $|X| = 1$. Din ortogonalitatea lui I şi J faţă de metrica g rezultă că IX şi JX sunt de asemenea vectori unitari care aparţin distribuţiei ortogonale pe K_1 şi JK_1, fiind în plus perpendiculari pe X. Deoarece distribuţia $\langle K_1, JK_1 \rangle^\perp$ este 2-dimensională, rezultă două posibilităţi pentru IX: este fie egal cu JX, fie cu $-JX$. Dar, presupunând $IX = JX$, ar rezulta din ecuaţiile (6.37)-(6.38) că $I = J$, ceea ce contrazice faptul că I induce orientarea opusă lui J (deoarece ω_I este antiautoduală). Deci pentru orice câmp X din $\langle K_1, JK_1 \rangle^\perp$ avem:

$$IX = -JX. \tag{6.39}$$

În concluzie, ecuaţiile (6.37)-(6.39) ne dau următoarea caracterizare a structurii complexe antiautoduale I: I coincide cu J pe distribuţia generată de K_1 şi JK_1 şi este egală cu $-J$ pe distribuţia ortogonală. Astfel suntem conduşi la definiţia suprafeţelor Kähler de tip Calabi (*cf.* [ACG03]), pe care le analizăm în continuare.

6.2.1. *Suprafeţe Kähler de tip Calabi.*

Definiţia 6.3. O suprafaţă Kähler (M, g, J, ω) se numeşte *de tip Calabi* dacă admite un câmp vectorial Killing hamiltonian nicăieri nul, K, astfel încât structura aproape hermitiană (g, I)– unde structura aproape complexă I coincide cu J pe distribuţia generată de K şi JK şi este egală cu $-J$ pe distribuţia ortogonală– este conformă Kähler .

---

[47] Aşa cum am observat şi în demonstraţia Teoremei 4.2, 2-forma φ_0, care este J-invariantă şi fără urmă, se identifică cu un endomorfism antisimetric al fibrării TM, care comută cu J.

În propoziţia care urmează obţinem descrierea locală explicită a suprafeţelor Kähler de tip Calabi, care rezultă din forma explicită pentru metrici Kähler ce admit un câmp Killing hamiltonian găsită de C.R. LeBrun în [LB91].

Propozitia 6.6. *Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler de tip Calabi, al cărei câmp Killing este K. Atunci structura Kähler este dată local de:*

$$g = (az - b)g_\Sigma + w(z)dz^2 + w(z)^{-1}(dt + \alpha)^2, \tag{6.40}$$

$$\omega = (az - b)\omega_\Sigma + dz \wedge (dt + \alpha), \tag{6.41}$$

unde z este aplicaţia moment a câmpului Killing K, t este o funcţie pe M cu proprietatea că $dt(K) = 1$, w este o funcţie de o variabilă, g_Σ este o metrică pe varietatea 2-dimensională Σ cu forma volum ω_Σ, α este o 1-formă pe Σ cu $d\alpha = a\omega_\Sigma$, iar a şi b sunt constante.

Reciproc, ecuaţiile (6.40)-(6.41) *definesc o structură Kähler de tip Calabi, al cărei câmp Killing este $K = \frac{\partial}{\partial t}$, pentru orice metrică g_Σ şi pentru orice funcţie strict pozitivă w.*

Demonstraţie. Demonstraţia urmează descrierea dată de LeBrun în [LB91] pentru metricile Kähler care admit un câmp Killing hamiltonian. Fie (g, J, ω) o structură hermitiană, care admite câmpul Killing $K = J \operatorname{grad} z$ real analitic (*i.e.* $\mathcal{L}_K J = 0$). Atunci $K - iJK$ este olomorf şi câtul complex este local o suprafaţă riemanniană Σ. Introducând coordonata olomorfă locală $x + iy$ pe Σ (folosind existenţa locală pe orice suprafaţă a coordonatelor izoterme), obţinem:

$$g = f_1(dx^2 + dy^2) + f_2 dz^2 + f_3(dt + \alpha)^2, \tag{6.42}$$

$$Jdx = dy, \qquad Jdz = f_3(dt + \alpha), \tag{6.43}$$

$$\omega = f_1 dx \wedge dy + dz \wedge (dt + \alpha), \tag{6.44}$$

unde $dt(K) = 1$ şi α este o 1-formă invariantă cu $\alpha(K) = 0$. Arătăm că $f_3 = f_2^{-1}$ şi toate funcţiile pozitive care apar, f_i, depind numai de variabilele x, y şi z. Acestea rezultă din condiţia impusă câmpului $K = J \operatorname{grad} z$ de a fi Killing. Calculând în două moduri norma lui K, avem:

$$|K|^2 = g(J \operatorname{grad} z, J \operatorname{grad} z) = g(\operatorname{grad} z, \operatorname{grad} z) = \frac{1}{f_2^2} g(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{1}{f_2},$$

$$|K|^2 = g(K, K) = f_3(dt + \alpha)^2(K, K) = f_3,$$

unde, pentru a obţine ultima egalitate, am folosit $\alpha(K) = 0$ şi $dt(K) = 1$. Rezultă astfel că funcţia f_3 este inversa funcţiei f_2. Din definiţia derivatei Lie şi din ipoteza $K = \frac{\partial}{\partial t}$-câmp Killing avem:

$$0 = (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} g)(X, Y) = \frac{\partial}{\partial t}(g(X, Y)) - g([\frac{\partial}{\partial t}, X], Y) - g(X, [\frac{\partial}{\partial t}, Y]),$$

pentru orice două câmpuri vectoriale X şi Y. Înlocuind $X = Y = \frac{\partial}{\partial x}$ în formula de mai sus, obţinem: $0 = \frac{\partial}{\partial t}(g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x})) = \frac{\partial}{\partial t}(f_1)$, de unde rezultă că funcţia f_1 nu depinde de variabila t. Analog înlocuind $X = Y = \frac{\partial}{\partial y}$ rezultă că şi funcţia f_2 este constantă în raport cu variabila t. Notând $f_1 = e^u w$ şi $f_2 = w$, ecuaţiile (6.42)-(6.44) devin:

$$g = e^u w(dx^2 + dy^2) + wdz^2 + w^{-1}(dt + \alpha)^2, \tag{6.45}$$

$$Jdx = dy, \qquad Jdz = w^{-1}(dt + \alpha), \tag{6.46}$$

$$\omega = e^u wdx \wedge dy + dz \wedge (dt + \alpha). \tag{6.47}$$

Structura hermitiană I din definiţia unei suprafeţe Kähler de tip Calabi (adică structura complexă I care este egală cu J pe distribuţia generată de câmpurile K şi JK şi egală cu $-J$ pe distribuţia ortogonală) este dată de:

$$Idx = -dy, \qquad Idz = w^{-1}(dt + \alpha),$$

cu forma Kähler:

$$\omega_I = -e^u wdx \wedge dy + dz \wedge (dt + \alpha). \tag{6.48}$$

Vom impune acum condiţia ca structurile (g, J, ω) şi $(\bar{g} = \lambda^{-2} g, I, \bar{\omega} = \lambda^{-2}\omega_I)$ să fie Kähler pentru o funcţie strict pozitivă λ.

$0 = d\omega = d(e^u wdx \wedge dy + dz \wedge (dt + \alpha)) = (e^u w)_z dz \wedge dx \wedge dy - dz \wedge d\alpha,$

deci ω este închisă dacă şi numai dacă avem:

$$(e^u w)_z dz \wedge dx \wedge dy = dz \wedge d\alpha. \tag{6.49}$$

Calculăm şi diferenţiala exterioară a formei $\bar{\omega}$:

$$\begin{aligned}
d\bar{\omega} &= d[\lambda^{-2}(-e^u wdx \wedge dy + dz \wedge (dt + \alpha))] \\
&= -2\lambda^{-3}(\lambda_x dx + \lambda_y dy + \lambda_z dz + \lambda_t dt)[-e^u wdx \wedge dy + dz \wedge (dt + \alpha)] \\
&\quad + \lambda^{-2}[-(e^u w)_z dz \wedge dx \wedge dy - dz \wedge d\alpha] \\
&= -\lambda^{-3}[\lambda dz \wedge d\alpha + ((e^u w)_z \lambda - 2\lambda_z e^u w) dz \wedge dx \wedge dy \\
&\quad + 2\lambda_x dx \wedge dz \wedge (dt + \alpha) + 2\lambda_y dy \wedge dz \wedge (dt + \alpha) + 2\lambda_t dt \wedge \omega_I].
\end{aligned}$$

Înlocuind (6.49) în această formulă pentru $d\bar{\omega}$, rezultă că $\bar{\omega}$ este închisă dacă şi numai dacă avem:

$$\begin{aligned}
&[(e^u w)_z \lambda - \lambda_z e^u w] dz \wedge dx \wedge dy + \lambda_x dx \wedge dz \wedge (dt + \alpha) \\
&\quad + \lambda_y dy \wedge dz \wedge (dt + \alpha) + \lambda_t dt \wedge \omega_I = 0,
\end{aligned}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$(e^u w)_z \lambda = \lambda_z e^u w, \qquad \lambda_x = \lambda_y = \lambda_t = 0, \tag{6.50}$$

de unde rezultă că λ depinde numai de variabila z şi $(e^u w \frac{1}{\lambda})_z = 0$, adică există o funcţie $h = h(x, y)$ astfel încât $e^u w = h\lambda$. Din Propoziţia 2.3 rezultă că structura complexă J este integrabilă dacă şi numai dacă $d\left(\mathcal{C}^\infty\left(\Lambda^{1,0} M\right)\right) \subset \mathcal{C}^\infty\left(\Lambda^{2,0} M \oplus \Lambda^{1,1} M\right)$. Deoarece $\theta_1 = dx + iJdx =$

$dx+idy$ şi $\theta = w(dz+iJdz) = wdz+i(dt+\alpha)$ formează o bază (locală) a spaţiului $\mathcal{C}^\infty(\Lambda^{1,0}M)$ şi θ_1 este închisă, condiţia ca J să fie integrabilă este echivalentă cu faptul că $d\theta$ aparţine idealului generat de $\{\theta_1, \theta\}$. Analog obţinem că structura aproape complexă I este integrabilă dacă şi numai dacă $d\theta$ aparţine idealului generat de $\{\theta_2, \theta\}$, unde $\theta_2 = dx + iIdx = dx - idy$ este tot închisă şi θ poate fi scrisă şi sub forma: $\theta = w(dz + iIdz)$.

Deoarece 1-forma α este invariantă (*i.e.* $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}}\alpha = 0$), rezultă că $d\alpha(\frac{\partial}{\partial t}, \cdot)$ este zero, astfel:

$d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) = (\mathcal{L}_X\alpha)(Y) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X))$,

pentru orice câmpuri vectoriale X şi Y; dacă înlocuim $X = \frac{\partial}{\partial t}$ obţinem:

$$d\alpha(\frac{\partial}{\partial t}, \cdot) = \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}}\alpha\right)(\cdot) - \mathcal{L}_{\cdot}\left(\alpha(\frac{\partial}{\partial t})\right) = 0,$$

unde, pentru ultima egalitate, am folosit invarianţa formei α şi anularea ei de-a lungul câmpului $K = \frac{\partial}{\partial t}$. De aici, înlocuind direct în expresia lui $d\theta$: $d\theta = d(wdz + i(dt+\alpha)) = w_x dx\wedge dz + w_y dy \wedge dz + id\alpha$, rezultă şi $d\theta(\frac{\partial}{\partial t}, \cdot) = 0$. Folosind aceasta, condiţiile echivalente pe care le-am obţinut pentru ca structurile I şi J să fie integrabile implică anularea formelor $d\theta \wedge (dx - idy)$ şi $d\theta \wedge (dx + idy)$. Pe de altă parte, calculăm:

$$\begin{aligned} d\theta \wedge (dx - idy) &= (w_x dx \wedge dz + w_y dy \wedge dz + id\alpha) \wedge (dx - idy) \\ &= i[w_x dx \wedge dy \wedge dz + d\alpha \wedge dx] \\ &\quad + [w_y dx \wedge dy \wedge dz + d\alpha \wedge dy]. \end{aligned}$$

Deci $d\theta \wedge (dx - idy) = 0$ dacă şi numai dacă $d\alpha \wedge dx = -w_x dy \wedge dz \wedge dx$ şi $d\alpha \wedge dy = w_y dx \wedge dz \wedge dy$, ceea ce, datorită faptului că $d\alpha(\frac{\partial}{\partial t}, \cdot) = 0$, este echivalent cu $d\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = -w_x$ şi $d\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = w_y$, adică avem:

$$d\alpha = -w_x dx \wedge dz + w_y dx \wedge dz + f dx \wedge dy, \tag{6.51}$$

unde f este o funcţie arbitrară. Analog obţinem că $d\theta \wedge (dx + idy)$ este zero dacă şi numai dacă avem:

$$d\alpha = w_x dy \wedge dz - w_y dx \wedge dz + f dx \wedge dy. \tag{6.52}$$

Din (6.51) şi (6.52) rezultă că I şi J sunt integrabile dacă şi numai dacă

$$w_x = w_y = 0 \quad \text{şi} \quad d\alpha = f dx \wedge dy, \tag{6.53}$$

unde f depinde numai de variabilele x şi y, deoarece $d\alpha$ este închisă şi rezultă că funcţia w, despre care ştiam că nu depinde de t, depinde numai de variabila z.

Punând laolaltă ecuaţiile (6.49), (6.50) şi (6.53), putem conchide că (M, g, J, ω) este o suprafaţă Kähler de tip Calabi având câmpul Killing K dacă şi numai dacă $e^u w = h(x,y)\lambda(z)$, cu $d\alpha = h(x,y)\lambda_z dx \wedge dy$, unde $\lambda = az - b$ pentru două constante reale a, b, iar $w = w(z)$

şi $h = h(x, y)$ sunt funcţii strict pozitive. Înlocuind (6.53) în (6.49) rezultă $(e^u w)_z dz \wedge dx \wedge dy = f(x, y) dz \wedge dx \wedge dy$, deci $(e^u w)_z = f(x, y)$, de unde, folosind (6.50), rezultă $\lambda f(x, y) = e^u w \lambda_z = h(x, y)\lambda(z)\lambda_z$, deci $f(x, y) = h(x, y)\lambda_z$, ceea ce implică $d\alpha = f dx \wedge dy = h(x, y)\lambda_z dx \wedge dy$ şi $\lambda_{zz} = 0$, adică λ este o funcţie afină de z.

Folosind libertatea pe care o avem în alegerea lui t, putem presupune că α este o 1-formă pe suprafaţa Σ, în timp ce $g_\Sigma = h(x, y)(dx^2 + dy^2)$ este o metrică pe Σ cu forma Kähler $\omega_\Sigma = h(x, y)dz \wedge dy$ şi astfel rezultă că structura Kähler de tip Calabi (g, J, ω) este dată de formulele (6.40)-(6.41):

$$
\begin{aligned}
g &= e^u w(dx^2 + dy^2) + w dz^2 + w^{-1}(dt + \alpha)^2 \\
&= (az - b)g_\Sigma + w(z)dz^2 + w(z)^{-1}(dt + \alpha)^2, \\
\omega &= e^u w dx \wedge dy + dz \wedge (dt + \alpha) \\
&= (az - b)\omega_\Sigma + dz \wedge (dt + \alpha).
\end{aligned}
$$

Reciproc, aceste ecuaţii definesc o structură Kähler şi se verifică prin calcul direct că admite câmpul Killing $K := \frac{\partial}{\partial t}$, iar structura aproape hermitiană (g, I), asociată acestui câmp Killing ca în definiţia unei suprafeţe Kähler de tip Calabi, este conformă Kähler cu (g, J) (mai precis $((az - b)^{-2}g, I)$ este o structură Kähler), rezultând astfel că suprafaţa este de tip Calabi, pentru orice metrică g şi orice funcţie strict pozitivă w. $\square$

Observaţia 6.7. Propoziţia 6.6 arată că metricile Kähler de tip Calabi sunt local de acelaşi tip cu cele construite de Calabi în [Cal82] (*cf.* Anexa B) pe suprafeţele riglate obţinute prin completarea cu o secţiune de la infinit a spaţiului total al unui fibrat olomorf în drepte, L, peste o suprafaţă riemanniană. Pe aceste varietăţi construite de Calabi, câmpul Killing K este câmpul vectorial indus de acţiunea naturală a lui S^1 pe fibrele lui L şi completat cu valoarea 0 de-a lungul secţiunii de la infinit (se observă că acest câmp se anulează numai pe secţiunea nulă şi pe cea de la infinit). Pe aceste varietăţi forma Kähler este:

$$\omega = \omega_\Sigma + dJdf,$$

pentru o funcţie f cu norma fibrei r. Deoarece $-dJd\log r$ este curbura fibratului olomorf în drepte L, care este bazică, rezultă că aplicaţia moment, z, a câmpului K este tot o funcţie de r. Deci, local, putem privi pe f ca o funcţie de z, astfel încât, dacă scriem $Jdz = w^{-1}(dt+\alpha)$, unde $dt(K) = 1$ şi 1-forma α este bazică, avem:

$$dJdf = \left(\frac{f'(z)}{w(z)}\right)_z dz \wedge (dt + \alpha) + \frac{f'(z)}{w(z)} d\alpha.$$

De aceea, considerând, fără a restrânge generalitatea, $b = -1$ în Propoziţia 6.6, avem: $f'(z) = zw(z)$.

6.2.2. *Legătura dintre suprafeţele Kähler de tip Calabi şi cele care admit o 2-formă hamiltoniană.* Aşa cum am văzut la începutul secţiunii 6.2, definiţia suprafeţelor Kähler de tip Calabi a fost motivată de caracterizarea obţinută pentru structura complexă antiautoduală I asociată unei suprafeţe Kähler ce admite o 2-formă hamiltoniană, ale cărei câmpuri Killing hamiltoniene asociate sunt dependente, dar nu ambele nule. Astfel, rezultă direct din definiţie, că acestea sunt un exemplu de suprafeţe Kähler de tip Calabi. În continuare, observăm că, exceptând cazul produselor Kähler locale de suprafeţe riemanniene, acestea sunt de fapt singurele suprafeţe Kähler de tip Calabi.

Teorema 6.3. *O suprafaţă Kähler este de tip Calabi dacă şi numai dacă:*

(i) *este local produsul Kähler a două suprafeţe Riemann, dintre care una admite un câmp vectorial Killing;*
sau
(ii) *admite o 2-formă hamiltoniană ale cărei câmpuri Killing asociate sunt dependente, dar nu ambele nule.*

Structura Kähler este atunci dată explicit de (6.40)-(6.41)*: în cazul* (i) $a = 0$ *şi în cazul* (ii) *putem considera* $a = 1$*,* $b = 0$*, fără a restrânge generalitatea.*

Demonstraţie. Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler de tip Calabi, care admite câmpul Killing K şi structura conformă Kähler (g, I). Din Propoziţia 6.6 rezultă că structura Kähler este dată de formulele (6.40)-(6.41). Considerăm următoarea 2-formă:

$$\varphi = (az - b)\omega_I + 3az\omega,$$

şi arătăm că este hamiltoniană.

Deoarece ω_I este antiautoduală ((6.48) implică $\omega_I \wedge \omega_I = -\omega \wedge \omega$), adică J-invariantă şi fără urmă, rezultă că $\varphi_0 = (az - b)\omega_I$ şi φ este J-invariantă. Conform notaţiilor pe care le-am folosit pentru 2-forme[48] avem: $\sigma = 2az$, $\lambda = az - b$, $\xi = 2az - b$ şi $\eta = b$. Deci $\varphi_0 = (az - b)\omega_I$ şi , conform Propoziţiei 4.1, rezultă că φ_0 este 2-formă twistor (deoarece structura aproape hermitiană $(\lambda^{-2}g, I)$ este Kähler, după cum am arătat în demonstraţia Teoremei 6.6).

Pentru ca φ să rezulte hamiltoniană trebuie să mai verificăm că este închisă. Aceasta rezultă din următorul calcul în care am folosit faptul

[48] Reamintim că unei 2-forme J-invariante $\varphi = \varphi_0 + \frac{3}{2}\sigma\omega$, i-am asociat 2-forma normalizată $\tilde{\varphi} := \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{4}\sigma\omega$, iar partea ei fără urmă se poate scrie: $\varphi_0 = \lambda\omega_I$, unde $\lambda = |\varphi_0| / \sqrt{2}$. Am mai introdus şi notaţiile: $\sigma = \xi + \eta$ şi $\pi = \xi\eta$, unde $\pi = \frac{\sigma^2}{4} - \lambda^2$ este pfaffianul formei $\tilde{\varphi}$.

că atât ω, cât şi $\lambda^{-2}\omega_I$ sunt 2-forme închise:

$$\begin{aligned} d\varphi &= d(\lambda\omega_I + 3az\omega) = d(\lambda^3\lambda^{-2}\omega_I) + 3adz \wedge \omega \\ &= 3d\lambda \wedge \omega_I + 3adz \wedge \omega = 3adz \wedge (\omega_I + \omega) \\ &= 6adz \wedge dz \wedge (dt + \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Câmpurile Killing hamiltoniene asociate 2-formei φ sunt: $K_1 = J \operatorname{grad} \sigma = 2aJ \operatorname{grad} z$ şi $K_2 = J \operatorname{grad} \pi = 2abJ \operatorname{grad} z$. Avem două cazuri, după cum constanta a este sau nu zero.

Dacă a este zero, atunci ambele câmpuri sunt identic nule şi formulele (6.40)-(6.41), care ne dau structura locală, devin:

$$g = -bg_\Sigma + w(z)dz^2 + w(z)^{-1}(dt + \alpha)^2,$$

$$\omega = -b\omega_\Sigma + dz \wedge (dt + \alpha),$$

unde α este închisă (deoarece $d\alpha = a\omega_\Sigma = 0$) şi astfel obţinem local un produs Kähler de suprafeţe Riemann (cazul (i)).

Dacă $a \neq 0$, folosind libertatea de alegere pentru z, putem considera $a = 1$ şi $b = 0$. Rezultă $K_1 = 2J \operatorname{grad} z$ şi $K_2 = 0$, deci câmpurile Killing asociate 2-formei hamiltoniene φ sunt dependente, dar nu ambele nule (cazul (ii)). □

6.2.3. *Descrierea locală a suprafeţelor Kähler slab autoduale pentru care câmpurile Killing hamiltoniene K_1 şi K_2 sunt liniar dependente.* La fel cum am procedat şi în primul caz al clasificării suprafeţelor Kähler slab autoduale, începem prin a calcula curbura unei suprafeţe Kähler de tip Calabi, care nu este local un produs Kähler de suprafeţe Riemann şi după aceea, pe baza formulelor obţinute, stabilim forma particulară pe care o iau (6.40)-(6.41) în cazul suprafeţelor Kähler extremale, biextremale şi slab autoduale.

Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler de tip Calabi, care nu este local un produs Kähler de suprafeţe Riemann. Conform Propoziţiei 6.3, putem considera $a = 1$, $b = 0$ şi notând[49] $w(z) = z/V(z)$, rezultă din (6.40)-(6.41) că structura Kähler este dată de:

$$g = zg_\Sigma + \frac{z}{V(z)}dz^2 + \frac{V(z)}{z}(dt + \alpha)^2, \tag{6.54}$$

$$\omega = z\omega_\Sigma + dz \wedge (dt + \alpha). \tag{6.55}$$

Folosind acelaşi argument ca pentru suprafeţele ortotorice, rezultă că tensorul de curbură al unei suprafeţe de tip Calabi este complet determinat de curbura scalară s a metricii g, de curbura scalară conformă κ a structurii hermitiene (g, I) şi de partea fără urmă ρ_0 a formei Ricci a structurii (g, J).

[49]Această notaţie îşi va găsi justificarea după ce stabilim forma particulară a structurii Kähler pe suprafeţele Kähler de tip Calabi extremale, unde V va fi un polinom.

Lema 6.2. *Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler de tip Calabi, care nu este local produs Kähler de suprafeţe Riemann şi a cărei structură este dată de (6.54)-(6.55). Atunci ρ_0 este un multiplu μ al formei Kähler ω_I a structurii hermitiene (g, I) şi μ, s, κ sunt date de:*

$$\mu = -\frac{1}{4z}\left(s_\Sigma + \left(\frac{V_z}{z^2}\right)_z z^2\right), \tag{6.56}$$

$$s = \frac{s_\Sigma - V_{zz}}{6z}, \tag{6.57}$$

$$\kappa = \frac{1}{6z}\left(s_\Sigma - z^2\left(z^2\left(\frac{V}{z^4}\right)_z\right)_z\right), \tag{6.58}$$

unde s_Σ este curbura scalară a suprafeţei riemanniene Σ. În particular, pe mulţimea deschisă a varietăţii M unde μ nu se anulează, structura aproape complexă antiautoduală determinată de ρ_0 este egală cu I.

Demonstraţie. Forma Ricci este dată de formula $\rho = -\frac{1}{2}dJd\log\left|\frac{vol_g}{vol_0}\right|$, unde $vol_g = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega$ şi $vol_0 = dx \wedge Jdx \wedge dz \wedge Jdz$. Înlocuind în această formulă structura complexă J şi forma ω date de (6.54)-(6.55), obţinem:

$$\rho = -\frac{1}{2}dJd(h(x,y)V(z)),$$

unde $\omega_\Sigma = h(x,y)dx \wedge dy$, rezultând:

$$\rho = -\frac{1}{2}dJd\log h(x,y) - \frac{1}{2}dJd\log V = \rho_\Sigma - \frac{1}{2}dJd\log V. \tag{6.59}$$

Primul termen este: $\rho_\Sigma = \frac{1}{2}s_\Sigma\omega_\Sigma$, iar pe al doilea îl calculăm astfel:

$$\begin{aligned} dJd\log V &= d\left(\frac{V_z}{V}Jdz\right) = d\left(\frac{V_z}{z}(dt+\alpha)\right) \\ &= \frac{V_{zz}}{z}dz \wedge (dt+\alpha) + V_z\left(\frac{1}{z}d\alpha - \frac{1}{z^2}dz \wedge (dt+\alpha)\right) \\ &= \frac{V_{zz}}{2z}(\omega+\omega_I) + V_z\left(\frac{1}{z}\omega_\Sigma - \frac{1}{2z^2}(\omega+\omega_I)\right), \end{aligned} \tag{6.60}$$

de unde, înlocuind în (6.59) şi folosind $\omega_\Sigma = \frac{\omega - \omega_I}{2z}$, obţinem:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4z}s_\Sigma(\omega-\omega_I) - \frac{V_{zz}}{4z}(\omega+\omega_I) - V_z\left(\frac{1}{4z^2}(\omega-\omega_I) - \frac{1}{4z^2}(\omega+\omega_I)\right) \\ &= -\frac{1}{4z}\left(s_\Sigma + \left(\frac{V_z}{z^2}\right)_z z^2\right)\omega_I + \frac{1}{4z}(s_\Sigma - V_{zz})\omega. \end{aligned}$$

Deoarece ω_I este antiautoduală, rezultă că primul termen este ρ_0 şi cum $\rho = \rho_0 + \frac{3}{2}s\omega$, obţinem astfel formulele (6.56)-(6.57).

Pentru a calcula curbura scalară conformă κ a structurii hermitiene (g, I), observăm că metrica conformă Kähler ($\bar{g} = z^{-2}g, I$) este, conform Propoziţiei 6.6, de asemenea de tip Calabi cu:

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \quad \text{şi} \quad \bar{V}(\bar{z}) = \bar{z}^4 V(\frac{1}{\bar{z}}) = \frac{V(z)}{z^4},$$

deoarece, introducând aceste notaţii pentru $\bar{z}$ şi $\bar{V}(\bar{z})$ în (6.40)-(6.41), avem:

$$\bar{g} = \bar{z}g_\Sigma + \frac{\bar{z}}{\bar{V}(\bar{z})}d\bar{z}^2 + \frac{\bar{V}(\bar{z})}{\bar{z}}(dt+\alpha)^2,$$

$$\bar{\omega} = z^{-2}\omega_I = -\bar{z}\omega_\Sigma - d\bar{z} \wedge (dt+\alpha).$$

Pe suprafaţa Kähler de tip Calabi $(M, \bar{g} = z^{-2}g, I, \bar{\omega} = z^{-2}\omega_I)$, curbura scalară $\bar{s}$ este, conform (6.57), dată de formula:

$$\bar{s} = \frac{s_\Sigma - \bar{V}_{\bar{z}\bar{z}}}{6\bar{z}} = \frac{z}{6}\left(s_\Sigma - z^2\left(z^2\left(\frac{V}{z^4}\right)_z\right)_z\right), \tag{6.61}$$

deoarece $z_{\bar{z}} = \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)_{\bar{z}} = -\frac{1}{\bar{z}^2} = -z^2$, de unde rezultă:

$$\bar{V}_{\bar{z}\bar{z}} = \left(\frac{V}{z^4}\right)_{\bar{z}\bar{z}} = -\left(z^2\left(\frac{V}{z^4}\right)_z\right)_{\bar{z}} = z^2\left(z^2\left(\frac{V}{z^4}\right)_z\right)_z.$$

Înlocuind (6.61) în formula curburii scalare conforme κ a structurii hermitiene (g, I) dată de (4.9): $\kappa = z^{-2}\bar{s}$, rezultă (6.58). $\square$

Propozitia 6.7. *Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler de tip Calabi, care nu este local produs Kähler de suprafeţe Riemann şi care admite câmpul Killing K. Atunci, curbura scalară a metricii g este aplicaţie moment pentru un multiplu al lui K dacă şi numai dacă g_Σ are curbura constantă k şi V este de forma:*

$$V(z) = A_1z^4 + A_2z^3 + kz^2 + A_3z + A_4. \tag{6.62}$$

Reciproc, orice suprafaţă Kähler dată de (6.54)-(6.55), cu V de forma (6.62), este extremală, cu forma Ricci: $\rho = \mu\omega_I + \frac{3}{2}s\omega$, unde:

$$\mu = -A_1z + \frac{A_3}{2z^2}, \tag{6.63}$$

$$s = -2A_1z - A_2. \tag{6.64}$$

De asemenea, curbura scalară conformă a structurii hermitiene (g, I) este:

$$\kappa = -\frac{A_3}{z^2} - \frac{2A_4}{z^3}. \tag{6.65}$$

Rezultă:

(i) *g are curbura scalară constantă dacă şi numai dacă $A_1 = 0$;*
(ii) *este scalar-plată (*i.e.* antiautoduală) dacă şi numai dacă $A_1 = A_2 = 0$;*
(iii) *(g, J) este Kähler-Einstein dacă şi numai dacă $A_1 = A_3 = 0$;*

(iv) *g este slab autoduală dacă şi numai dacă $A_3 = 0$;*
(v) *g este autoduală dacă şi numai dacă $A_3 = A_4 = 0$;*
(vi) *(g, J) este biextremală dacă şi numai dacă g este slab autoduală;*
(vii) *g este Bach-plată dacă şi numai dacă $4A_1A_4 - A_2A_3 = 0$.*

Demonstraţie. Curbura scalară s este aplicaţie moment pentru un multiplu al câmpului Killing $K = J \operatorname{grad} z$ dacă şi numai dacă s este o funcţie afină de z. Pe de altă parte, din formula (6.57) avem:

$$6zs + V_{zz} = s_\Sigma,$$

de unde rezultă că ambii membrii ai ecuaţiei sunt constanţi (deoarece s_Σ nu depinde de variabila z, iar membrul stâng depinde numai de z). Rezultă atunci că suprafaţa Σ are curbura constantă k, unde $s_\Sigma = 2k$ şi $6zs + V_{zz} = 2k$, deci, cum s este funcţie afină de z, V rezultă polinom de grad cel mult 4 cu termenul pătratic kz^2, *i.e.* avem:

$$V(z) = A_1z^4 + A_2z^3 + kz^2 + A_3z + A_4. \tag{6.66}$$

Formulele (6.63)-(6.65) pentru μ, s şi κ rezultă printr-un calcul direct înlocuind în formulele date de Lema 6.2 forma dată de (6.66) pentru funcţia V şi $s_\Sigma = 2k$, astfel:

$$\begin{aligned}
\mu &= -\frac{1}{4z}\left(s_\Sigma + \left(\frac{V_z}{z^2}\right)_z z^2\right)\\
&= -\frac{1}{4z}\left(2k + z^2\left(4A_1z + 3A_2 + \frac{2k}{z} + \frac{A_3}{z^2}\right)_z\right)\\
&= -\frac{1}{4z}\left[2k + 4A_1z^2 - 2k - \frac{2A_3}{z}\right] = -A_1z + \frac{A_3}{2z^2},
\end{aligned} \tag{6.67}$$

$$s = \frac{s_\Sigma - V_{zz}}{6z} = \frac{2k - 12A_1z^2 - 6A_2z - 2k}{6z} = -2A_1z - A_2, \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{6z}\left(s_\Sigma - z^2\left(z^2\left(\frac{V}{z^4}\right)_z\right)_z\right)\\
&= \frac{1}{6z}\left(2k - z^2\left(-A_2 - \frac{2k}{z} - \frac{3A_3}{z^2} - \frac{4A_4}{z^3}\right)_z\right)\\
&= \frac{1}{6z}\left(2k - 2k - \frac{6A_3}{z} - \frac{12A_4}{z^2}\right) = -\frac{A_3}{z^2} - \frac{2A_4}{z^3}.
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Echivalenţele (i)-(iii) şi (v) rezultă imediat din formulele pe care leam obţinut:

(i) g are curbura scalară constantă $s = -2A_1z - A_2$ dacă şi numai dacă $A_1 = 0$;
(ii) g este scalar-plată (ceea ce este echivalent cu faptul că este antiautoduală, deoarece conform (6.10) avem $W^+ = \frac{3}{4}s\omega \otimes_0 \omega$) dacă şi numai dacă $s = -2A_1z - A_2$ este identic nulă, *i.e.* $A_1 = A_2 = 0$;

(iii) (g, J) este Kähler-Einstein dacă şi numai dacă $\rho_0 = \mu\omega_I$ este identic nul, adică $\mu = -A_1 z + \frac{A_3}{2z^2} = 0$, echivalent cu $A_1 = A_3 = 0$;

(v) g este autoduală, *i.e.* $W^- = 0$, dacă şi numai dacă $\kappa = 0$ (conform formulei (6.11): $W^- = \frac{3}{4}\kappa\omega_I \otimes_0 \omega_I$). Deoarece curbura scalară conformă este dată de formula: $\kappa = -\frac{A_3}{z^2} - \frac{2A_4}{z^3}$, rezultă echivalenţa cu anularea constantelor A_3 şi A_4.

Pentru (iv) folosim caracterizarea echivalentă a suprafeţelor Kähler slab autoduale dată de Propoziţia 4.3: pe mulţimea deschisă unde $\rho_0 = \mu\omega_I$ nu se anulează (*i.e.* unde structura nu este Kähler-Einstein), suprafaţa (M, g, J, ω) este slab autoduală dacă şi numai dacă structura aproape hermitiană $(\mu^{-2}g, I)$ este Kähler. Deoarece I este o structură complexă integrabilă, această condiţie este echivalentă cu închiderea formei $\mu^{-2}\omega_I$. Calculăm diferenţiala acestei forme, folosind faptul că 2-forma $z^{-2}\omega_I$ este închisă (după cum am văzut în demonstraţia Propoziţiei 6.6):

$$d(\mu^{-2}\omega_I) = d(z^2\mu^{-2}z^{-2}\omega_I) = d(z^2\mu^{-2}) \wedge z^{-2}\omega_I,$$

deci, cum μ este funcţie de z, rezultă că $\mu^{-2}\omega_I$ este închisă dacă şi numai dacă $(z\mu^{-1})_z = 0$. Înlocuind formula obţinută pentru μ: $\mu = -A_1 z + \frac{A_3}{2z^2}$, această condiţie devine $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\mu}\right) = \frac{6z^2 A_3}{A_3 - 2A_1 z^3} = 0$, adică $A_3 = 0$.

Arătăm că g este biextremală dacă şi numai dacă $A_3 = 0$, ceea ce împreună cu (iv) implică echivalenţa (vi). Deoarece metrica g este din ipoteză extremală, pentru a fi biextremală mai trebuie impusă condiţia ca pfaffianul p al formei Ricci normalizate $\tilde{\rho} = \frac{1}{2}\mu\omega_I + \frac{1}{4}s\omega$ să fie potenţial de olomorfie. Folosind formula (4.12) rezultă că p este dat de:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}|\mu\omega_I|^2 = \frac{1}{4}s^2 - \mu^2 \\ &= \frac{1}{4}(-2A_1 z - A_2)^2 - \left(-A_1 z + \frac{A_3}{2z^2}\right)^2 \qquad (6.70) \\ &= \left(-2A_1 z - \frac{1}{2}A_2 + \frac{A_3}{2z^2}\right)\left(-\frac{1}{2}A_2 - \frac{A_3}{2z^2}\right), \end{aligned}$$

deci p este o funcţie raţională în variabila z. Conform Observaţiei 2.1, funcţia p este potenţial de olomorfie dacă şi numai dacă câmpul vectorial $J \operatorname{grad} p = p'(z) J \operatorname{grad} z$ este Killing şi, deoarece ştim că $J \operatorname{grad} z$ este Killing, această condiţie este echivalentă cu faptul că $p'(z)$ este constantă, adică p este o funcţie afină de z. Din formula (6.70) aceasta este adevărat dacă şi numai dacă $A_3 = 0$.

Pentru (vii) observăm că tensorul Bach B este J-invariant, deoarece suprafaţa Kähler (M, g, J, ω) este extremală (*cf.* Propoziţia 2.6) şi atunci este determinat de 2-forma Bach antiautoduală asociată, $\tilde{B}$, pe care o calculăm cu formula (2.10): $\tilde{B} = (dJds)_0 + s\rho_0$.

$$\begin{aligned}
dJds &= -2A_1(dJdz) = -2A_1 d\left[\frac{V(z)}{z}(dt+\alpha)\right] \\
&= -2A_1\left[d\left(\frac{V(z)}{z}\right)\wedge(dt+\alpha) + \frac{V(z)}{z}d\alpha\right] \\
&= -2A_1\left[\left(3A_1z^2 + 2A_2z + k - \frac{A_4}{z^2}\right)dz\wedge(dt+\alpha) + \frac{V(z)}{z}d\alpha\right] \\
&= -2A_1\left[\left(3A_1z^2 + 2A_2z + k - \frac{A_4}{z^2}\right)\frac{\omega+\omega_I}{2} + \frac{V(z)}{z}\frac{\omega-\omega_I}{2z}\right],
\end{aligned}$$

de unde, deoarece ω_I este J-invariantă, rezultă:

$$\begin{aligned}
(dJds)_0 &= -A_1\left[3A_1z^2 + 2A_2z + k - \frac{A_4}{z^2} - \frac{V(z)}{z^2}\right]\omega_I \\
&= -A_1\left[2A_1z^2 + A_2z - \frac{A_3}{z} - \frac{2A_4}{z^2}\right]\omega_I.
\end{aligned}$$

Iar pentru $s\rho_0$ obţinem:

$$\begin{aligned}
s\rho_0 = s\mu\omega_I &= (-2A_1z - A_2)\left(-A_1z + \frac{A_3}{2z^2}\right)\omega_I \\
&= \left(2A_1^2z^2 - \frac{A_1A_3}{z} + A_1A_2z - \frac{A_2A_3}{2z^2}\right)\omega_I.
\end{aligned}$$

Adunând ultimile două relaţii avem:

$$\tilde{B} = (dJds)_0 + s\rho_0 = \frac{4A_1A_4 - A_2A_3}{2z^2}\omega_I,$$

de unde rezultă (vii): $B = 0$ dacă şi numai dacă $4A_1A_4 - A_2A_3 = 0$. □

Această familie de metrici Kähler extremale din Propoziţia 6.7 a fost considerată în mai multe locuri. Include, în particular, metricile Kähler extremale de coomogenitate 1 sub acţiunea lui $U(2)$ construite de Calabi în [Cal82] (*cf.* Anexa B); mai general, arătăm că toate aceste metrici sunt de coomogenitate 1 sub acţiunea (locală) a unui grup Lie 4-dimensional, local izomorf cu o extindere centrală a grupului de izometrii al unei suprafeţe de curbură constantă k (păstrăm în continuare notaţiile introduse în Propoziţia 6.7, astfel încât k este coeficientul termenului pătratic al polinomului V). În articolul [ACG03] aceste suprafeţe sunt numite *suprafeţe Kähler extremale de tip Calabi* şi prezentăm în continuare pe scurt cum pot fi ele realizate ca metrici Bianchi diagonale de clasă IX, VIII şi II, după cum constanta k este pozitivă, negativă sau nulă. Mai întâi reamintim ce înţelegem prin metrici de coomogenitate 1 şi prin metrici Bianchi diagonale.

Definiţia 6.4. O varietate riemanniană n-dimensională (M, g) se numeşte (local) de *coomogenitate* 1 dacă admite o acţiune (locală) izometrică a unui grup Lie, cu orbite $(n-1)$-dimensionale.

Observăm că o varietate (M, g) de coomogenitate 1 se scrie local ca un produs: $M \cong (t_1, t_2) \times G/H$, iar metrica g induce, pe fiecare orbită $\{t\} \times G/H$, o metrică $h(t)$ stâng invariantă, deci, printr-o schimbare a parametrului t, poate fi scrisă astfel: $g = dt^2 + h(t)$.

Definiţia 6.5. *Metricile Bianchi* sunt metrici reale 4-dimensionale cu un grup de izometrii 3-dimensional care acţionează tranzitiv pe 3-varietăţi.

O clasificare completă a acestor metrici a fost dată de Bianchi[50] şi de obicei sunt scrise sub următoarea formă:

$$g = (ABC)^2 dt^2 + A^2\sigma_1^2 + B^2\sigma_2^2 + C^2\sigma_3^2, \tag{6.71}$$

unde A, B şi C sunt funcţii pozitive diferenţiabile în variabila t, iar σ_i sunt 1-forme invariante care satisfac:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= n_1\sigma_2 \wedge \sigma_3, \\ d\sigma_2 &= n_2\sigma_3 \wedge \sigma_1 - a\sigma_1 \wedge \sigma_2, \\ d\sigma_3 &= n_3\sigma_1 \wedge \sigma_2 - a\sigma_1 \wedge \sigma_3, \end{aligned} \tag{6.72}$$

unde $n_i \in \{-1, 0, 1\}$ şi a este o constantă. Pentru $a = 0$ se obţin metricile Bianchi numite de tip A, iar pentru $a \neq 0$ se obţin cele de tip B. În continuare avem nevoie de metricile Bianchi diagonale de tip A, care sunt prezentate în Tabelul 1 împreună cu grupul 3-dimensional corespunzător.[51]

Cu excepţia clasei VI_0, pentru $A = B$, toate aceste metrici mai admit o simetrie (locală) care roteşte planul $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, obţinându-se astfel aşa-numitele metrici Bianchi *biaxiale*.

Revenind la metricile Kähler extremale date de formulele (6.54)-(6.55), cu V de forma (6.62) şi g_Σ de curbură constantă k, putem

---

[50] Luigi Bianchi a realizat un studiu metodic al simetriilor şi claselor de izometrii ale tuturor varietăţilor riemanniene 3-dimensionale în articolul [B1898]. Pentru fiecare dintre dimensiunile posibile ale orbitei: 1 şi 2 (acţiuni netranzitive) şi 3 (acţiuni tranzitive) şi pentru fiecare clasă de simetrie a acţiunilor grupului, sunt date expresii explicite ale metricii în coordonate canonice (locale). În cazul grupurilor de izometrii simplu tranzitive 3-dimensionale, această clasificare a metricilor prin clase de simetrie coincide cu împărţirea, în nouă clase de izomofism, a grupurilor de izometrii (aşa-numitele clase sau tipuri Bianchi I-IX). Această clasificare a fost îmbunătăţită de teoreticianul cosmolog C.G. Behr (1968), care a observat o anumită redundanţă între clasele determinate de Bianchi, astfel încât aceste tipuri mai sunt numite şi Bianchi-Behr. Metricile Bianchi au fost utilizate în special de cosmologi pentru realizarea modelelor de univers spaţiale omogene (în sensul că grupul Lie 3-dimensional acţionează tranzitiv pe orbitele "spaţiale" 3-dimensionale).

[51] Reamintim pe scurt cine sunt grupurile Nil^3 şi Sol^3. Grupul Nil^3, numit şi grupul lui Heisenberg, este un grup Lie 3-dimensional nilpotent format din matrice 3×3 de forma $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x, y, z sunt numere reale şi înmulţirea este cea obişnuită de la matrice, fiind astfel un subgrup al lui $GL(3, \mathbb{R})$. Grupul Sol^3 este tot un grup Lie 3-dimensional, care este rezolubil şi poate fi reprezentat de $\mathbb{R}^3$ cu următoarea lege multiplicativă: $(x, y, z)(x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^z y', z + z')$.

Tabelul 1. Metricile Bianchi diagonale de tip A

clasa	n_1	n_2	n_3	G
I	0	0	0	$\mathbb{R}^3$
II	0	0	1	Nil^3
VI_0	1	-1	0	Sol^3
VII_0	1	1	0	$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$
VIII	1	1	-1	$\mathrm{SU}(1,1)$
IX	1	1	1	$\mathrm{SU}(2)$

presupune, până la omotetii, $k = \varepsilon$, unde $\varepsilon = 1, 0$ sau -1. De asemenea, notăm $dt + \alpha = \sigma_3$ şi introducem 1-formele t-dependente σ_1, σ_2 pe Σ astfel încât $g_\Sigma = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$, $\omega_\Sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2$ şi

$$d\sigma_1 = \varepsilon\sigma_2 \wedge \sigma_3, \quad d\sigma_2 = \varepsilon\sigma_3 \wedge \sigma_1, \quad d\sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2. \tag{6.73}$$

Substituind σ_1, σ_2, σ_3 în (6.54), obţinem:

$$g = \frac{z}{V(z)}dz^2 + z(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \frac{V(z)}{z}\sigma_3^2, \tag{6.74}$$

iar structura complexă este determinată de:

$$J\sigma_1 = \sigma_2 \qquad Jdz = \frac{V(z)}{z}\sigma_3, \tag{6.75}$$

şi forma Kähler este:

$$\omega = dz \wedge \sigma_3 + z\sigma_1 \wedge \sigma_2 = d(z\sigma_3). \tag{6.76}$$

Recunoaştem în formula (6.74), unde 1-formele σ_i satisfac relaţiile (6.73), forma metricilor Bianchi diagonale biaxiale de clasă IX, VIII sau II, după cum ε este egal cu 1, -1 sau 0. Acestea admit o acţiune locală de coomogenitate 1 a lui $\mathrm{SU}(2)$, dacă $\varepsilon = 1$, a lui $\mathrm{SU}(1,1)$ dacă $\varepsilon = -1$ sau a grupului Nil dacă $\varepsilon = 0$, iar orbitele sunt mulţimile de nivel ale lui z. Pentru a ne convinge de aceasta, considerăm tripletul de câmpuri vectoriale $(Z_1, Z_2, Z_3 = K_1)$, determinate de condiţiile: $\sigma_i(Z_j) = \delta_{ij}$ şi $dz(Z_i) = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker. Atunci, pentru fiecare valoare a lui z, câmpurile Z_1, Z_2, Z_3 sunt tangente la orbita corespunzătoare M_z (deoarece avem: $0 = dz(Z_i) = g(\operatorname{grad} z, Z_i)$, iar $\operatorname{grad} z$ este ortogonal pe mulţimile de nivel ale funcţiei z) şi arătăm în continuare că generează o algebră Lie izomorfă cu $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{su}(1,1)$ sau $\mathfrak{nil}^3$, după cum ε este egal cu 1, -1 sau 0.

Pentru $\varepsilon = 1$, formulele (6.73) devin:

$$d\sigma_1 = \sigma_2 \wedge \sigma_3, \quad d\sigma_2 = \sigma_3 \wedge \sigma_1, \quad d\sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2. \tag{6.77}$$

Din aceste relaţii determinăm comutatorii dintre câmpurile vectoriale Z_1, Z_2 şi Z_3, folosind formula pentru derivata exterioară:

$$(d\sigma)(X, Y) = X(\sigma(Y)) - Y(\sigma(X)) - \sigma([X, Y]),$$

pentru orice 1-formă σ şi orice două câmpuri vectoriale X, Y. Din această formulă aplicată 1-formei σ_1 şi câmpurilor vectoriale Z_1, Z_2 rezultă (folosind condiţiile din definiţia câmpurilor vectoriale):

$$\begin{aligned}0 &= (\sigma_2 \wedge \sigma_3)(Z_1, Z_2) = (d\sigma_1)(Z_1, Z_2)\\ &= Z_1(\sigma_1(Z_2)) - Z_2(\sigma_1(Z_1)) - \sigma_1([Z_1, Z_2]) = -\sigma_1([Z_1, Z_2]),\end{aligned}$$

deci $\sigma_1([Z_1, Z_2]) = 0$ şi analog calculăm $\sigma_2([Z_1, Z_2])$ şi $\sigma_3([Z_1, Z_2])$:

$$\begin{aligned}0 &= (\sigma_3 \wedge \sigma_1)(Z_1, Z_2) = (d\sigma_2)(Z_1, Z_2)\\ &= Z_1(\sigma_2(Z_2)) - Z_2(\sigma_2(Z_1)) - \sigma_2([Z_1, Z_2]) = -\sigma_2([Z_1, Z_2]),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 &= (\sigma_1 \wedge \sigma_2)(Z_1, Z_2) = (d\sigma_3)(Z_1, Z_2)\\ &= Z_1(\sigma_3(Z_2)) - Z_2(\sigma_3(Z_1)) - \sigma_3([Z_1, Z_2]) = -\sigma_3([Z_1, Z_2]).\end{aligned}$$

Astfel obţinem: $\sigma_1([Z_1, Z_2]) = 0$, $\sigma_2([Z_1, Z_2]) = 0$ şi $\sigma_3([Z_1, Z_2]) = -1$, iar din aceste trei relaţii rezultă $[Z_1, Z_2] = -Z_3$. La fel se calculează şi celelate croşete şi se obţine: $[Z_2, Z_3] = -Z_1$, $[Z_3, Z_1] = -Z_2$. Aceste reguli de comutare ne spun că algebra Lie generată de Z_1,Z_2 şi Z_3 se identifică cu $\mathfrak{su}(2)$. Procedând în acelaşi fel pentru $\varepsilon = -1$ obţinem $\mathfrak{su}(1, 1)$, iar pentru $\varepsilon = 0$ $\mathfrak{nil}^3$.

Rezultă astfel că fiecare orbită poate fi local identificată cu grupul Lie corespunzător algebrei Lie respective şi putem construi local un triplet nou de câmpuri vectoriale independente $(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3)$ astfel încât $[\tilde{Z}_i, Z_j] = 0$ şi $dz(\tilde{Z}_i) = 0$, $i, j = 1, 2, 3$ (pentru fiecare orbită, dacă (Z_1, Z_2, Z_3) este o bază de câmpuri vectoriale stâng invariante, atunci $(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3)$ este o bază de câmpuri vectoriale drept invariante). Arătăm că $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ şi $\tilde{Z}_3$ sunt câmpuri Killing faţă de metrica g. Considerăm câmpul vectorial $\tilde{Z}_1$ (pentru celelalte două rezultă analog) şi este suficient să verificăm că derivata Lie a metricii g de-a lungul câmpului vectorial $\tilde{Z}_1$ se anulează pe o bază, iar pentru calcule este cel mai bine să alegem baza $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$. Folosind formula derivatei Lie, avem:

$$(\mathcal{L}_{\tilde{Z}_1} g)(X, Y) = \tilde{Z}_1(g(X, Y)) - g([\tilde{Z}_1, X], Y) - g(X, [\tilde{Z}_1, Y]),$$

pentru orice două câmpuri vectoriale X, Y. Lăsând pe X şi Y să parcurgă baza $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$, obţinem că $(\mathcal{L}_{\tilde{Z}_1} g)(X, Y)$ se anulează pe toate aceste combinaţii posibile, deoarece croşetele din ultimii doi termeni dispar (chiar din definiţia sa, $\tilde{Z}_1$ comută cu elementele din baza aleasă), iar din formula (6.74) a metricii rezultă că $g(X, Y)$ este o funcţie care depinde numai de z, astfel încât derivată în direcţia câmpului vectorial $\tilde{Z}_1$ se anulează: $\tilde{Z}_1(f(z)) = f'(z)dz(\tilde{Z}_1) = 0$.

Dacă $\varepsilon \neq 0$, atunci K_1, $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$, $\tilde{Z}_3$ generează o algebră Lie 4-dimensională, corespunzătoare acţiunii lui $\mathrm{U}(2)$, pentru $\varepsilon = 1$, sau a lui $\mathrm{U}(1, 1)$, pentru $\varepsilon = -1$. Dacă $\varepsilon = 0$, atunci $\tilde{Z}_3$ este un multiplu constant de K_1 (deoarece ambele sunt câmpuri Killing, care rezultă coliniare din condiţiile care le definesc), dar, pe de altă parte, se obţine un nou câmp vectorial Killing, $\tilde{K}_1$, generat de rotaţiile în jurul originii în 2-planul euclidian $\mathbb{E}^2$ al lui x, y. Atunci $\tilde{K}_1$, K_1, $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ generează o algebră Lie 4-dimensională $\mathfrak{g}$, corespunzătoare unei acţiuni locale a unui grup G, obţinut din produsul semidirect[52] dintre Nil şi S^1 pentru acţiunea naturală prin automorfisme a lui S^1 pe Nil. Centrul grupului $G = S^1 \ltimes Nil$ coincide cu centrul lui Nil, care este 1-dimensional şi câtul lui G prin centrul său este izomorf cu Isom($\mathbb{E}^2$); cu alte cuvinte, G este izomorf cu o extindere centrală[53] 1-dimensională a grupului Isom($\mathbb{E}^2$).

În particular, pentru suprafeţele Kähler slab autoduale, din cele observate anterior şi din Propoziţia 6.7 obţinem următorul rezultat, care ne dă clasificarea acestor suprafeţe în cazul în care câmpurile Killing asociate sunt dependente, dar nu identic nule:

Teorema 6.4. *Fie (M, g, J, ω) o suprafaţă Kähler slab autoduală; s curbura scalară şi p pfaffianul formei Ricci normalizate; $K_1 = J \operatorname{grad} s$, $K_2 = J \operatorname{grad} p$ câmpurile vectoriale Killing asociate şi presupunem K_1 nicăieri nul şi $K_2 = bK_1$, unde b este o constantă reală (posibil zero).*

(i) *Atunci suprafaţa (M, g, J, ω) admite o acţiune locală de coomogenitate* 1 *a lui $G = U(2), U(1,1)$ sau $S^1 \ltimes Nil$ şi este local izomorfă cu o metrică Bianchi diagonală de clasă IX, VIII, respectiv II.*

Mai precis, dacă σ_1, σ_2, σ_3 sunt 1*-formele (locale) pe M induse de această acţiune, corespunzătoare unui triplet de* 1*-forme G-invariante pe G, astfel încât $d\sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2$, $d\sigma_2 = \varepsilon\sigma_3 \wedge \sigma_1$, $d\sigma_1 = \varepsilon\sigma_2 \wedge \sigma_3$, unde $\varepsilon = 1, -1$ sau* 0*, după cum $G = U(2), U(1,1)$ sau $S^1 \ltimes Nil$; atunci structura Kähler (g, J) poate fi adusă la forma* (6.74)-(6.75)*, unde z este o funcţie afină de s şi $V(z)$ este de forma:*

$$V(z) = A_1 z^4 + A_2 z^3 + \varepsilon z^2 + A_4. \tag{6.78}$$

(ii) *Reciproc, orice suprafaţă Kähler de forma* (6.74)-(6.75)*, cu V dat de* (6.78) *este slab autoduală.*

(iii) *Structura Kähler este autoduală dacă şi numai dacă $A_4 = 0$.*

[52]Date două grupuri H şi N şi o acţiune a lui H pe N, adică un homomorfism $\theta\colon H \to Aut(N)$, produsul semidirect dintre H şi N, notat $H \ltimes_\theta N$ (sau dacă acţiunea dată de θ este subînţeleasă se poate scrie mai simplu $H \ltimes N$), este produsul catezian $H \times N$ cu următoarea lege de compunere care defineşte o structură de grup: $(h_1, n_1)(h_2, n_2) = (h_1 h_2, \theta(h_2)(n_1) n_2)$.

[53]Reamintim pe scurt ce este o extindere centrală. În general, spunem că un grup G este o extindere a unui grup N prin grupul Q, dacă există M subgrup normal în G, astfel încât $M \cong N$ şi $G/M \cong Q$ (sau, echivalent, dacă există următorul şir exact: $1 \to N \to G \to Q \to 1$). Extinderea se numeşte centrală dacă imaginea lui N este inclusă în centrul grupului G.

Anexa A. Descompunerea tensorului de curbură

În această anexă arătăm că tensorul de curbură al unei varietăţi riemanniene se descompune în mod natural în trei părţi, reprezentate de curbura scalară, partea fără urmă a tensorului Ricci şi tensorul Weyl (în dimensiune ≥ 4). Această descompunere rezultă din faptul că fibratul căruia îi aparţine tensorul de curbură (datorită simetriilor sale) nu este ireductibil la acţiunea grupului ortogonal, deci are o descompunere naturală în componente ireductibile.

În continuare (M, g) este o varietate riemanniană n-dimensională, iar pentru diferitele noţiuni de curbură (R, Ric, $scal$) vom folosi convenţiile anunţate în preliminarii, (2.4)-(2.6).

Prezentăm pentru început proprietăţile de simetrie ale tensorului de curbură.

Propozitia A.1. *Pe orice varietate riemanniană n-dimensională, tensorul de curbură R, văzut ca* $(0,4)$*-tensor satisface următoarele egalităţi algebrice:*

(1) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$,
(2) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$,
(3) *Identitatea Bianchi algebrică:*

$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0,$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y, Z, W. *În plus,* R, *văzut ca* $(2,2)$*-tensor, satisface următoarea egalitate, numită identitatea Bianchi diferenţială:*

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0.$$

Observaţia A.1. Datorită simetriilor (1), rezultă că R, văzut ca $(2,2)$-tensor, este o aplicaţie liniară de la $\Lambda^2 M$ la $\Lambda^2 M$ definită prin formula:

$$g(R(X \wedge Y), Z \wedge W) = R(X,Y,Z,W),$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y, Z, W. Egalitatea (2) înseamnă că R este o aplicaţie simetrică faţă de structura euclidiană indusă pe $\Lambda^2 M$. Rezultă astfel că tensorul de curbură R este o secţiune a fibratului $S^2\Lambda^2 M$.

Pentru orice spaţiu vectorial euclidian[54] n-dimensional (V, q), considerăm spaţiul tensorilor care satisfac aceleaşi identităţi algebrice ca şi R într-un punct. Vom da o descompunere a acestui spaţiu, obţinând astfel descompunerea tensorului de curbură al unei varietăţi riemanniene ca un caz particular.

[54]Este necesară considerarea unui produs scalar pe V, datorită faptului că vrem să identificăm diverse spaţii tensoriale şi pentru aceasta este nevoie de un izomorfism canonic între V şi dualul său, după cum am observat la începutul Secţiunii 2.

Definiţia A.1. Un tensor T de tip $(0,4)$ pe V se numeşte *tensor algebric de curbură* dacă satisface identităţile (1)-(3) din Propoziţia A.1. Notăm spaţiul tensorilor algebrici $\mathcal{C}(V)$.

Am văzut în Observaţia A.1 că un tensor T are simetriile (1) şi (2) dacă şi numai dacă T aparţine spaţiului $S^2\Lambda^2V$. Pentru a da o descriere a spaţiului $\mathcal{C}(V)$, considerăm următoarea aplicaţie, cu ajutorul căreia putem da o caracterizare a condiţiei (3) (identitatea Bianchi algebrică).

Definiţia A.2. *Aplicaţia Bianchi*, notată b, este endomorfismul spaţiului $\otimes^4V$, definit astfel:

$$b(R)(x,y,z,w) = \frac{1}{3}\left(R(x,y,z,w) + R(y,z,x,w) + R(z,x,y,w)\right),$$

pentru orice R din $\otimes^4V$ şi x, y, z, w din V^*.

Din definiţie rezultă că aplicaţia b este $GL(V)$-echivariantă, idempotentă: $b^2 = b$ şi invariază spaţiul $S^2\Lambda^2V$. Considerând restricţia lui b la $S^2\Lambda^2V$, obţinem următoarea descompunere $GL(V)$-echivariantă:

$$S^2\Lambda^2V = Ker\, b \oplus Im\, b.$$

Folosind aplicaţia Bianchi rezultă următoarea descriere a spaţiului tensorilor algebrici de curbură:

$$\mathcal{C}(V) = Ker\, b \subset S^2\Lambda^2V.$$

În continuare introducem pentru tensorii algebrici de curbură noţiunile corespunzătoare curburii Ricci şi scalare şi arătăm cum $\mathcal{C}(V)$ se descompune ca $O(q)$-modul.

Definiţia A.3. *Contracţia Ricci* este următoarea aplicaţie $O(q)$-invariantă:

$$c\colon S^2\Lambda^2V \to S^2V, \quad c(R)(x,y) = tr R(x,\cdot,y,\cdot),$$

pentru orice R în $S^2\Lambda^2V$ şi orice x, y în V^*.

Reciproc, există un mod canonic de a construi un element al lui $S^2\Lambda^2V$ din două elemente ale lui S^2V.

Definiţia A.4. *Produsul Kulkarni-Nomizu* a doi tensori simetrici h, k din S^2V este 4-tensorul $h \owedge k$ definit astfel:

$$\begin{aligned}(h \owedge k)(x,y,z,w) = h(x,z)k(y,w) + h(y,w)k(x,z)\\ - h(x,w)k(y,z) - h(y,z)k(x,w),\end{aligned} \tag{A.1}$$

pentru orice x, y, z, w din V^*.

Observaţia A.2. Din (A.1) rezultă următoarele proprietăţi:

(1) $h \owedge k \in \mathcal{C}(V)$,
(2) $h \owedge k = k \owedge h$,
(3) $(h+h') \owedge k = h \owedge k + h' \owedge k$,

(4) $q \owedge q$ este de două ori identitatea[55] lui $\Lambda^2 V$.

Teorema A.1. *Dacă $n \geq 4$, spaţiul $\mathcal{C}(V)$ are următoarea descompunere în subspaţii ireductibile, ca $O(q)$-modul:*

$$\mathcal{C}(V) = \mathcal{U}(V) \oplus \mathcal{Z}(V) \oplus \mathcal{W}(V), \tag{A.2}$$

unde:

$$\mathcal{U}(V) = \mathbb{R} q \owedge q,$$

$$\mathcal{Z}(V) = q \owedge (S^2_0 V),$$

$$\mathcal{W}(V) = Ker(c\,|\,\mathcal{C}(V)) = Ker\, c \cap Ker\, b.$$

Demonstraţie. Existenţa acestei descompuneri rezultă din faptul că pentru $n \geq 2$ aplicaţia:

$$g \owedge : S^2 V \to \mathcal{C}(V), \quad k \mapsto g \owedge k,$$

este injectivă şi adjunctul ei este restricţia la $\mathcal{C}(V)$ a contracţiei Ricci. Atunci se obţine:

$$\mathcal{C}(V) = Ker(c\,|\,\mathcal{C}(V)) \oplus Im\,(q \owedge),$$

de unde rezultă descompunerea (A.2), deoarece avem: $S^2 V = \mathbb{R} q \oplus S^2_0 V$, unde am notat cu $S^2_0 V$ subspaţiul 2-tensorilor simetrici fără urmă. Mai dificilă este demonstraţia ireductibilităţii subspaţiului $\mathcal{W}(V)$, care rezultă din argumente ale teoriei invarianţilor, folosind faptul că spaţiul vectorial al formelor pătratice $O(q)$-invariante pe $\mathcal{C}(V)$ este 3-dimensional (o demonstraţie este dată în [Be81], Exposé IX). $\square$

Definiţia A.5. Spaţiul $\mathcal{W}(V)$ se numeşte *spaţiul tensorilor Weyl* şi pentru orice tensor de curbură T notăm $W(T)$ componenta sa din $\mathcal{W}(V)$, care se numeşte *partea Weyl* a lui T.

Putem calcula $W(T)$ explicit, folosind contracţia Ricci şi urma. Pentru orice k din $S^2 V$ are loc:

$$c(q \owedge k) = (n-2)k + (\mathrm{tr}\, k) q.$$

Astfel, dacă notăm $Ric(T) := c(T)$ şi $scal(T) := \mathrm{tr}\, Ric(T)$, obţinem formula[56]:

$$T = \frac{scal(T)}{2n(n-1)} q \owedge q + \frac{1}{n-2} Ric_0(T) \owedge q + W(T), \tag{A.3}$$

unde $Ric_0(T) \overset{not.}{=} Ric(T) - \frac{scal(T)}{n} q$.

Revenim acum la tensorul de curbură R al unei varietăţi riemanniene (M, g). Pentru fiecare punct x al lui M, R_x aparţine spaţiului $\mathcal{C}(V)$,

[55] Prin identificarea: $End(\Lambda^2 V) = \otimes^2 \Lambda^2 V$.

[56] Într-un anumit sens $W(T)$ apare ca un rest la „împărţirea” succesivă prin q.

unde $V = T_x^*M$ cu produsul scalar $q = g_x$. Astfel, obţinem descompunerea tensorului de curbură ca o consecinţă a formulei (A.3) (folosind notaţiile introduse, au loc egalităţile: $Ric = Ric(R)$, $scal = scal(R)$):

$$R = \frac{scal}{2n(n-1)} g \owedge g + \frac{1}{n-2} Ric_0 \owedge g + W. \tag{A.4}$$

Dacă $h \overset{not.}{=} \frac{scal}{2n(n-1)} g + \frac{1}{n-2} Ric_0$ este *tensorul Ricci normalizat*, atunci descompunerea (A.4) devine:

$$R = h \owedge g + W. \tag{A.5}$$

Definiţia A.6. *Tensorul Weyl* W al unei varietăţi riemanniene n-dimensionale, cu $n \geq 4$ este partea Weyl a tensorului de curbură R şi este dat de formula (A.4) sau (A.5).

Observaţia A.3. Tensorul Weyl al unei varietăţi riemanniene n-dimensionale (M, g) este identic nul dacă $n < 4$, iar descompunerea lui R este mai simplă:
$n = 2: \; R = \frac{scal}{4} g \owedge g$ şi $scal = 2\kappa$, unde κ este curbura Gauss.
$n = 3: \; R = \frac{scal}{12} g \owedge g + Ric_0 \owedge g$.

Observaţia A.4. Tensorul Weyl W, văzut ca $(1, 3)$-tensor, depinde numai de structura conformă definită de metrica g: $W^g = W^{fg}$, pentru orice funcţie pozitiv definită f. În particular, pentru $n \geq 4$, rezultă echivalenţa:

$$W = 0 \Longleftrightarrow (M, g) \text{ este conform plată.}$$

Observaţia A.5. Folosind pentru $V = T_x^*M$ notaţiile din descompunerea (A.2), se obţin următoarele echivalenţe pentru tensorul de curbură R:

- $R \in \mathcal{U} \Longleftrightarrow R = \frac{scal}{2n(n-1)} g \owedge g$
  $\Longleftrightarrow (M, g)$ are curbura secţională constantă egală cu $\frac{scal}{n(n-1)}$;
- $R \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} \Longleftrightarrow Ric_0 = 0 \Longleftrightarrow (M, g)$ este Einstein;
- $R \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{Z} \Longleftrightarrow W = 0 \Longleftrightarrow (M, g)$ $(n \geq 4)$ este conform plată.

Observaţia A.6. Dacă varietatea (M, g) este orientată, atunci există o acţiune a grupului special ortogonal, $SO(n)$, şi se pune întrebarea dacă descompunerea (A.2) (pentru (V, q) spaţiu euclidian orientat) rămâne ireductibilă. S-a demonstrat[57] că această descompunere este ireductibilă şi sub acţiunea lui $SO(q)$ pentru $n \neq 4$[58].

În dimensiune 4, descompunerea spaţiului $\mathcal{C}(V)$ ca $SO(4)$-modul este următoarea:

$$\mathcal{C}(V) = \mathcal{U}(V) + \mathcal{Z}(V) + \mathcal{W}^+(V) + \mathcal{W}^-(V),$$

[57]De exemplu în [Be81], Exposé IX.

[58]Aceasta are legătură cu faptul că algebra Lie $\mathfrak{so}(4)$ nu este simplă.

unde $\mathcal{W}^{\pm}(V) \overset{not.}{=} S_0(\Lambda^{\pm}V)$, iar $\Lambda^{\pm}V$ sunt subspaţiile proprii ale operatorului Hodge $*$ (*cf.* Definiţia 2.1), corespunzătoare valorilor proprii ± 1, care ne dau descompunerea (3.1): $\Lambda^2 V = \Lambda^+ V \oplus \Lambda^- V$.

Astfel, pentru varietăţile riemanniene 4-dimensionale orientate, se obţine, în plus, o descompunere a tensorului Weyl W în două componente: W^+ şi W^-, numite partea autoduală, respectiv antiautoduală.

Anexa B. Metrici Kähler extremale

În această anexă definim metricile Kähler extremale aşa cum au fost ele introduse iniţial de E. Calabi[59] şi arătăm că sunt caracterizate de proprietatea următoare: curbura scalară, $scal$, este potenţial de olomorfie, justificând în acest fel Definiţia 5.1. De asemenea, prezentăm un exemplu de metrică Kähler extremală care nu are curbura scalară constantă şi anume construcţia lui Calabi[60] pe prima suprafaţă Hirzebruch.

Fie (M, J) o varietate complexă compactă de dimensiune reală $2m$ şi Ω un element fixat al spaţiului de Rham $H^2_{dR}(M.\mathbb{R})$ al lui M. Notăm cu $\mathcal{M}_\Omega$ mulţimea tuturor metricilor Kähler (g, J, ω), a căror formă Kähler ω aparţine lui Ω. Presupunem că Ω este o clasă Kähler, adică mulţimea $\mathcal{M}_\Omega$ este nevidă şi , în continuare, vom considera elemente ale lui $\mathcal{M}_\Omega$ fie metricile Kähler g, fie formele lor fundamentale ω. Atunci $\mathcal{M}_\Omega$ este o varietate Fréchet[61] de dimensiune infinită. Mai precis, din Lema[62] dd^c rezultă că pentru orice două elemente ω_0 şi ω există o funcţie reală ϕ unic determinată până la o constantă aditivă, astfel încât să aibă loc:

$$\omega = \omega_0 + dd^c\phi.$$

Cu alte cuvinte, pentru orice alegere a unui punct bază ω_0, $\mathcal{M}_\Omega$ se identifică cu submulţimea lui $C^\infty(M, \mathbb{R})/\mathbb{R}$ formată din clasele $[\phi]$ pentru care forma $\omega_0 + dd^c\phi$ este pozitiv definită (aici, $[\phi]$ este clasa lui ϕ modulo o constantă aditivă).

---

[59]Eugenio Calabi a introdus metricile Kähler extremale în 1954 cu scopul de a lărgi clasa metricilor Kähler-Einstein, deoarece există varietăţi a căror clasă Chern este pozitivă şi care nu admit nici o metrică Kähler-Einstein. Din păcate, existenţa unei metrici Kähler extremale pe o varietate complexă compactă impune anumite restricţii asupra grupului de automorfisme: dacă nu este discret, trebuie să conţină un subgrup compact conex netrivial, existând astfel varietăţi care nu admit nici o metrică extremală (un exemplu se obţine prin eclatarea lui $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ în punctele $(0, \infty)$, $(1, \infty)$, $(0, 1)$, (∞, ∞), varietate pentru care componenta identităţii a grupului de automorfisme este grupul aditiv $\mathbb{C}$).

[60]În articolul [Cal82], Calabi construieşte exemple de varietăţi complexe compacte care admit metrici Kähler extremale a căror curbură scalară nu este constantă. Varietăţile considerate sunt fibrări complexe în drepte proiective peste spaţiul proiectiv complex $(n-1)$-dimensional, $\mathbb{C}P^{n-1}$, şi se arată că există o unică metrică Kähler extremală în fiecare clasă de coomologie de Rham a unei metrici Kähler. Pentru $n = 2$ se obţin exemple de astfel de metrici (Kähler extremale de curbură scalară neconstantă) pe suprafeţele Hirzebruch F_k.

[61]O varietate Fréchet se defineşte la fel ca o varietate diferenţiabilă de dimensiune n, înlocuind condiţia ca local să fie spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ cu aceea ca local să fie spaţiu Fréchet. Un spaţiu vectorial V înzestrat cu o metrică completă şi invariantă la translaţii se numeşte Fréchet dacă topologia indusă de metrică este local convexă.

[62]Această lemă, care mai este numită şi lema $\partial\bar{\partial}$ datorită egalităţii $dd^c = 2i\partial\bar{\partial}$, este un analog pe varietăţi complexe al Lemei lui Poincaré şi este demonstrată de exemplu în [Be87], 2.110.

Pentru orice g din $\mathcal{M}_\Omega$, spaţiul tangent $T_g\mathcal{M}_\Omega$ se identifică atunci cu spaţiul 2-formelor exacte J-invariante şi prin operatorul dd^c obţinem următoarea identificare:

$$T_g\mathcal{M}_\Omega = C^\infty(M,\mathbb{R})/\mathbb{R} = C^\infty_{0,g}(M,\mathbb{R}), \tag{B.1}$$

unde $C^\infty(M,\mathbb{R})$ este spaţiul funcţiilor reale diferenţiabile pe M, $\mathbb{R}$ spaţiul funcţiilor reale constante şi $C^\infty_{0,g}(M,\mathbb{R})$ spaţiul funcţiilor reale f pe M cu proprietatea:

$$\int_M f\, vol_g = 0. \tag{B.2}$$

Astfel, un câmp vectorial pe $\mathcal{M}_\Omega$ poate fi văzut ca o asociere:

$$g \in \mathcal{M}_\Omega \mapsto f_g \in C^\infty_{0,g}(M,\mathbb{R}).$$

Grupul $\mathrm{Aut}_0(M)$, componenta identităţii a grupului Lie complex de automorfisme ale structurii complexe J, acţionează trivial pe $H^2_{dR}M$, deci invariază Ω şi acţionează pe $\mathcal{M}_\Omega$: pentru orice γ din $\mathrm{Aut}_0(M)$ şi orice ω din $\mathcal{M}_\Omega$, avem: $\gamma\cdot\omega = (\gamma^{-1})^*\omega$. Acţiunea infinitezimală pe $\mathcal{M}_\Omega$ a unui element X din algebra Lie a grupului $\mathrm{Aut}_0(M)$, formată din câmpurile vectoriale reale olomorfe ($\mathcal{L}_X J = 0$), este câmpul vectorial $\hat{X}$ definit de:

$$g \mapsto -\mathcal{L}_X\omega = -d(X \lrcorner \omega) = -dd^c f^X_g, \tag{B.3}$$

unde pentru prima egalitate am folosit formula lui Cartan (*cf.* (2.3)): $\mathcal{L}_X\omega = X\lrcorner d\omega + d(X\lrcorner\omega)$, iar f^X_g este potenţialul real al lui X faţă de g, definit de următoarea descompunere[63], care există şi este unică pentru orice câmp real olomorf X ($\mathcal{L}_X J = 0$) pe o varietate Kähler compactă:

$$X = X_H + \operatorname{grad} f + J \operatorname{grad} h,$$

unde X_H este dualul unei 1-forme armonice ξ_H şi f, h sunt funcţii reale normalizate: $\int_M f\, vol_g = \int_M h\, vol_g = 0$; f se numeşte potenţialul real, iar $F := f + ih$ potenţialul complex al câmpului vectorial X. Prin identificarea $T_g\mathcal{M}_\Omega = C^\infty_{0,g}(M,\mathbb{R})$, $\hat{X}$ este câmpul vectorial $\hat{X}_g = -f^X_g$. Ultima egalitate din (B.3) rezultă astfel:

$$\begin{aligned} d(X\lrcorner\omega) &= d((X_H + \operatorname{grad} f + J\operatorname{grad} h)\lrcorner\omega) \\ &= d(J\xi_H + Jdf - dh) = Jd^c\xi_H + dd^c f = dd^c f, \end{aligned}$$

deoarece ξ_H este formă armonică, ceea ce, pe o varietate Kähler compactă, implică $d^c\xi_H = 0$.

[63]Această descompunere este o consecinţă directă a descompunerii Hodge a spaţiului k-formelor pe o varietate Kähler compactă M: $\Omega^k M = \mathcal{H}^k(M,\mathbb{C}) \oplus \delta\Omega^{k+1}M \oplus d\Omega^{k-1}M$ (unde $\mathcal{H}^k(M,\mathbb{C})$ este spaţiul k-formelor complexe armonice pe M, adică din nucleul operatorului Laplace: $\mathcal{H}^k(M,\mathbb{C}) = \{\omega \in \Omega^k M \mid \Delta\omega = 0\}$) şi care este demonstrată de exemplu în [M04], Lema 13.2.

Definiţia B.1. Fie (M, J) o varietate complexă compactă, pe care fixăm o clasă de coomologie $\Omega \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$. *Funcţionala Calabi*, C, este funcţia reală definită pe $\mathcal{M}_\Omega$ astfel:

$$C(g) = \int_M scal_g^2 \, vol_g. \tag{B.4}$$

Definiţia B.2. O metrică Kähler pe varietatea compactă complexă M se numeşte *extremală* dacă este punct critic al funcţionalei Calabi C pe spaţiul corespunzător $\mathcal{M}_\Omega$.

Observaţia B.1. Folosind descompunerea tensorului de curbură (*cf.* Anexa A) în cazul unei varietăţi Kähler, se obţin formulele următoare, numite formulele lui Apte[64]:

$$\int_M c_1^2 \wedge \Omega^{m-2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_M \left(\frac{scal^2}{4m^2} - \frac{|\rho_0|^2}{m(m-1)}\right) \omega^m, \tag{B.5}$$

(B.6)

$$\int_M c_2 \wedge \Omega^{m-2} = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\frac{scal^2}{4m(m+1)} - \frac{2\,|\rho_0|^2}{(m-1)(m+2)} + \frac{|W^{\mathcal{K}}|^2}{m(m-1)}\right) \omega^m,$$

unde $\Omega = [\omega]$ este clasa de Rham a formei ω şi c_1, c_2 sunt prima şi a doua clasă Chern a varietăţii complexe (M, J), din $H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$ şi respectiv $H^4_{dR}(M, \mathbb{R})$, iar în membrul stâng al formulelor se integrează folosind un reprezentant al claselor respective, deoarece rezultatul nu depinde de aceste alegeri.

Din formulele lui Apte rezultă că obţinem aceleaşi puncte critice înlocuind funcţionala Calabi C cu oricare dintre următoarele funcţionale pe $\mathcal{M}_\Omega$, pentru Ω fixată:

$$g \mapsto \int_M |R|^2 \, vol_g \;\;, \; g \mapsto \int_M |Ric|^2 \, vol_g \text{ sau } g \mapsto \int_M \left|W^{\mathcal{K}}\right|^2 vol_g.$$

Observaţia B.2. În [Cal82] sunt date estimări pentru marginile inferioare ale funcţionalelor C, $g \mapsto \int_M |R|^2 \, vol_g$ şi $g \mapsto \int_M |Ric|^2 \, vol_g$ definite pe $\mathcal{M}_\Omega$, unde clasa $\Omega = [\omega]$ este fixată. Pentru funcţionala Calabi C, a cărei margine inferioară o notăm C_0, avem:

$$C_0 \geq \frac{S^2(g)}{V(g)}, \tag{B.7}$$

[64]O demonstraţie a formulelor lui Apte şi o prezentare a claselor Chern sunt date în [Be87], Capitolul 2. În aceste formule, $W^{\mathcal{K}}$ este *tensorul Bochner*, care se defineşte ca fiind partea tensorului de curbură R din intersecţia $\mathcal{W}(2m) \cup \mathcal{K}(m)$, unde $\mathcal{W}(2m)$ este spaţiul tensorilor Weyl de pe varietatea riemanniană $2m$-dimensională (M, g), iar $\mathcal{K}(m)$ este spaţiul tensorilor de curbură kählerieni, definit ca nucleul restricţiei aplicaţiei Bianchi (*cf.* Definiţia A.2) la spaţiul $S^2\Lambda^{1,1}M$, căruia îi aparţine R, datorită simetriilor pe care le are pe o varietate Kähler.

unde $V(g)$ este volumul total al varietăţii compacte M faţă de metrica g şi care este constant pe $\mathcal{M}_\Omega$: $V(g) \overset{not.}{=} V$, datorită egalităţii:

$$V(g) := \int_M vol_g = \int_M \frac{1}{m!}\omega^m,$$

iar S este funcţionala următoare: $S(g) = \int_M scal_g \, vol_g$, care este constantă pe $\mathcal{M}_\Omega$, deoarece folosind identitatea algebrică[65]:
$\rho \wedge \omega^{m-1} = \frac{1}{m}\Lambda(\rho)\omega^m$ şi $scal_g := tr_g(Ric) = 2tr_\omega(\rho) = 2\Lambda(\rho)$ avem:

$$S(g) = \int_M scal_g \, vol_g = \frac{2}{m!}\int_M \Lambda(\rho)\omega^m = \frac{2}{(m-1)!}\int_M \rho \wedge \omega^{m-1},$$

iar $\frac{1}{2\pi}\rho$ este un reprezentant al primei clase Chern[66], deci clasa de coomologie a formei Ricci ρ nu depinde decât de structura complexă a varietăţii M, rezultând astfel că funcţionala S este constantă pe $\mathcal{M}_\Omega$: $S(g) \overset{not.}{=} S$.

Estimarea (B.7) pentru marginea inferioară a funcţionalei Calabi se obţine din inegalitatea Cauchy-Schwarz astfel:

$$C(g)V(g) = \int_M scal_g^2 \, vol_g \cdot \int_M vol_g \geq \left(\int_M scal_g \, vol_g\right)^2 = S^2(g).$$

Observăm că valoarea $\frac{S^2}{V}$ este atinsă dacă şi numai dacă există o metrică Kähler $g \in \mathcal{M}_\Omega$ de curbură scalară constantă: $scal_g = const.$. Conform Teoremei Matsushima-Lichnérowicz[67], varietăţile Kähler compacte al căror grup de transformări olomorfe nu este reductiv[68], nu admit metrici Kähler de curbură scalară constantă, deci pe aceste varietăţi marginea inferioară $\frac{S^2}{V}$ nu este atinsă de funcţionala Calabi pentru nici o metrică din nici o clasă de coomologie.

În continuare calculăm prima derivată a funcţionalei Calabi pentru a demonstra că o metrică g este extremală dacă şi numai dacă $scal_g$ este potenţial de olomorfie.

După cum am observat, un vector tangent în punctul g la $\mathcal{M}_\Omega$ se identifică în mod natural cu o funcţie reală ϕ pe M care satisface

[65] Operatorul algebric real Λ acţionează pe forme şi este adjunctul operatorului L care reprezintă produsul exterior cu forma Kähler ω (*cf.* Definiţia 2.5).

[66] Faptul că prima clasă Chern a unei varietăţi Kähler compacte este reprezentată de un multiplu al formei Ricci şi anume $c_1 = \left[\frac{1}{2\pi}\rho\right]$ este demonstrat de exemplu în [Be87], Capitolul 2 sau în [M04], Partea 4. Reciproca acestui fapt este faimoasa conjectură a lui Calabi, demonstrată de Yau: pe o varietate Kähler compactă cu forma Kähler ω şi forma Ricci ρ, pentru orice $(1,1)$-formă reală închisă ρ_1 din clasa de coomologie $2\pi c_1(M)$ există o unică metrică Kähler cu forma fundamentală ω_1 în aceeaşi clasă de coomologie cu ω şi a cărei formă Ricci este ρ_1.

[67] O demonstraţie a acestei teoreme este dată în articolul [L57].

[68] Grupul de trasformări olomorfe ale lui M este reductiv dacă şi numai dacă algebra Lie $\mathfrak{h}$ a câmpurilor olomorfe este reductivă. O algebră Lie $\mathfrak{g}$ se numeşte *reductivă* dacă reprezentarea ei adjunctă este semisimplă, ceea ce este echivalent cu faptul că $\mathfrak{g}$ este suma directă dintre centrul său şi o algebră semisimplă.

condiţia de normare: $\int_M \phi\, vol_g = 0$. Variaţia corespunzătoare a formei ω este:

$$\dot{\omega} = dd^c\dot{\phi}.$$

Variaţiile corespunzătoare ale elementelor care apar în expresia funcţionalei Calabi sunt calculate în următoarea lemă:

Lema B.1. *Pentru orice variaţie $\dot{\omega} = dd^c\dot{\phi}$ a metricii g în $\mathcal{M}_\Omega$, prima variaţie a formei volum vol_g, a formei Ricci şi a curburii scalare $scal_g$ sunt date de formulele:*

$$\dot{vol}_g = -\Delta\dot{\phi}\, vol_g, \tag{B.8}$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2} dd^c \Delta\dot{\phi}, \tag{B.9}$$

$$\dot{scal}_g = -\Delta^2\dot{\phi} - 2\langle dd^c\dot{\phi}, \rho\rangle. \tag{B.10}$$

Demonstraţie. Pornind de la formula formei volum a lui M în funcţie de forma Kähler ω: $vol_g = \frac{\omega^m}{m!}$, obţinem (B.8) astfel:

$$\begin{aligned}\dot{vol}_g &= \frac{1}{(m-1)!}\dot{\omega} \wedge \omega^{m-1} = dd^c\dot{\phi} \wedge \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= \langle dd^c\dot{\phi}, \omega\rangle vol_g = -\Delta\dot{\phi}\, vol_g.\end{aligned}$$

Pentru a doua egalitate am folosit faptul că $*\omega = \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!}$, de unde, din definiţia operatorului Hodge $*$ (*cf.* Definiţia 2.1), rezultă:

$$\alpha \wedge \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} = \alpha \wedge (*\omega) = \langle \alpha, \omega\rangle vol_g, \tag{B.11}$$

pentru orice 2-formă α, deci, în particular, pentru $\alpha = dd^c\dot{\phi}$. Ultima egalitate rezultă din formula operatorului Laplace pe varietăţi Kähler dată de (2.8) : $\Delta f = -\langle dd^c f, \omega\rangle$, pentru orice funcţie f.

Pentru (B.9) utilizăm scrierea locală a formei Ricci ρ a unei varietăţi Kähler:

$$\rho =_{loc} -\frac{1}{2} dd^c log \frac{vol_g}{vol_0},$$

unde vol_0 este forma volum a metricii Kähler plate, determinată de orice alegere a unui sistem local de coordonate olomorfe. Astfel, folosind şi (B.8), obţinem:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{2} dd^c \frac{\dot{vol}_g}{vol_0} \cdot \frac{vol_0}{vol_g} = \frac{1}{2} dd^c \Delta\dot{\phi}.$$

Determinăm variaţia curburii scalare pornind de la identitatea următoare:

$$\frac{1}{2m} scal_g\, \omega^m = \rho \wedge \omega^{m-1}, \tag{B.12}$$

care se obţine din (B.11) astfel:

$$\rho \wedge \omega^{m-1} = (m-1)!\langle \rho, \omega \rangle \, vol_g = \frac{1}{m} tr_\omega(\rho)\, \omega^m$$
$$= \frac{1}{2m} tr_g(Ric)\, \omega^m = \frac{1}{2m} scal_g\, \omega^m.$$

Din (B.12) obţinem:

$$\text{(B.13)} \quad \frac{1}{2m}\dot{scal}_g \omega^m + \frac{1}{2} scal_g\, \dot\omega \wedge \omega^{m-1} = \dot\rho \wedge \omega^{m-1} + (m-1)\rho \wedge \dot\omega \wedge \omega^{m-2}.$$

Înlocuind $\dot\omega = dd^c\dot\phi$ şi $\dot\rho = \frac{1}{2}dd^c\Delta\dot\phi$ în (B.13), avem:

(B.14)

$$\frac{1}{m}\dot{scal}_g \omega^m + scal_g\, dd^c\dot\phi \wedge \omega^{m-1} = dd^c\Delta\dot\phi \wedge \omega^{m-1} + 2(m-1)\rho \wedge dd^c\dot\phi \wedge \omega^{m-2}.$$

Aplicând următoarele formule, care sunt adevărate pentru orice 2-forme α, α_i:

$$m\alpha \wedge \omega^{m-1} = \langle \alpha, \omega \rangle \omega^m,$$
$$m(m-1)\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \omega^{m-2} = (\mathrm{tr}_\omega(\alpha_1)\mathrm{tr}_\omega(\alpha_2) - \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle)\omega^m,$$

pentru $\alpha = dd^c\dot\phi$, $\alpha = dd^c\Delta\dot\phi$ şi $\alpha_1 = \rho$, $\alpha_2 = dd^c\dot\phi$, obţinem relaţiile:

$$mdd^c\dot\phi \wedge \omega^{m-1} = \langle dd^c\dot\phi, \omega \rangle \omega^m, \quad mdd^c\Delta\dot\phi \wedge \omega^{m-1} = \langle dd^c\Delta\dot\phi, \omega \rangle \omega^m,$$
$$m(m-1)\rho \wedge dd^c\dot\phi \wedge \omega^{m-2} = (\mathrm{tr}_\omega(\rho)\mathrm{tr}_\omega(dd^c\dot\phi) - \langle \rho, dd^c\dot\phi \rangle)\omega^m,$$

pe care le înlocuim în (B.14) şi rezultă:

$$\dot{scal}_g + scal_g \langle dd^c\dot\phi, \omega \rangle = \langle dd^c\Delta\dot\phi, \omega \rangle + 2\mathrm{tr}_\omega(\rho)\mathrm{tr}_\omega(dd^c\dot\phi) - 2\langle \rho, dd^c\dot\phi \rangle,$$

de unde, ţinând cont de relaţia: $\langle dd^c\dot\phi, \omega \rangle = \langle \dot\omega, \omega \rangle = 0$ (deoarece $\langle \omega, \omega \rangle = m = const.$), rezultă că al doilea termen din membrul stâng şi cel din mijloc din membrul drept se anulează ($\mathrm{tr}_\omega(dd^c\dot\phi) = \langle dd^c\dot\phi, \omega \rangle = 0$), iar aplicând formula operatorului Laplace pe varietăţi Kähler (2.8), primul termen din membrul drept devine: $\langle dd^c\Delta\dot\phi, \omega \rangle = -\Delta^2\dot\phi$, deci obţinem (B.10). □

Din lema precedentă putem deduce acum calculul primei derivate a lui C.

Propozitia B.1. *Prima derivată $\dot C$ a funcţionalei Calabi, de-a lungul oricărei variaţii $\dot\omega = dd^c\dot\phi$ a metricii g în $\mathcal{M}_\Omega$, este dată de:*

$$\text{(B.15)} \qquad \dot C = -4(\dot\phi, \delta\delta\nabla^- d\, scal_g).$$

Demonstraţie. Reamintim că pentru orice 1-formă α, derivata covariantă $\nabla\alpha$ se descompune într-o parte J-invariantă, notată $\nabla^+\alpha$, şi una J-antiinvariantă, notată $\nabla^-\alpha$ astfel încât avem:

$$\nabla^\pm\alpha(X,Y) = \frac{1}{2}(\nabla\alpha(X,Y) \pm \nabla\alpha(JX,JY)).$$

Utilizând (B.8) şi (B.10), obţinem:

$$\begin{aligned}
\dot{C} &= \int_M \left[(2scal_g\dot{scal}_g)\,vol_g + scal_g^2\,\dot{vol}_g\right] \\
&= \int_M (2scal_g\dot{scal}_g - scal_g^2\Delta\dot{\phi})\,vol_g \\
&= \int_M (-2scal_g\Delta^2\dot{\phi} - 4scal_g\langle dd^c\dot{\phi},\rho\rangle - scal_g^2\Delta\dot{\phi})\,vol_g \\
&= -4\int_M (scal_g\delta\delta\nabla^- d\dot{\phi})\,vol_g \\
&= -4(\delta\delta\nabla^- d\,scal_g,\dot{\phi}).
\end{aligned}$$

Pentru a obţine penultima egalitate am folosit următoarea formulă[69] a operatorului $\delta\delta\nabla^-$ acţionând pe 1-forme:

$$\delta\delta\nabla^-\alpha = \frac{1}{2}\Delta\delta\alpha - \langle d^c\alpha,\rho\rangle + \frac{1}{2}\langle\alpha, d\,scal_g\rangle,$$

pentru $\alpha = d\dot{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\delta\delta\nabla^- d\dot{\phi} &= \frac{1}{2}\Delta\delta d\dot{\phi} - \langle d^c d\dot{\phi},\rho\rangle + \frac{1}{2}\langle d\dot{\phi}, d\,scal_g\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Delta^2\dot{\phi} + \langle dd^c\dot{\phi},\rho\rangle + \frac{1}{2}\langle d\dot{\phi}, d\,scal_g\rangle,
\end{aligned}$$

iar prin integrarea ultimului termen obţinem:

$$\int_M \langle d\dot{\phi}, d\,scal_g\rangle\,vol_g = \int_M \langle\delta d\dot{\phi}, scal_g\rangle\,vol_g = \int_M scal_g\Delta\dot{\phi}\,vol_g.$$

Ultima egalitate rezultă din faptul că operatorul $\delta\delta\nabla^- d$ este autoadjunct. □

Consecinţă imediată a acestei propoziţii este echivalenţa următoare, pe care ne-am propus să o demonstrăm în această anexă, pentru a justifica Definiţia 5.1:

Propozitia B.2. *O metrică Kähler g pe o varietate complexă compactă (M,J) este extremală dacă şi numai dacă curbura ei scalară, $scal_g$, este potenţial de olomorfie.*

Demonstraţie. Din Propoziţia B.1, rezultă că o metrică Kähler g este extremală, adică punct critic în $\mathcal{M}_\Omega$, dacă şi numai dacă produsul scalar global $(\dot{\phi}, \delta\delta\nabla^- d\,scal_g)$ se anulează pentru orice variaţie a lui g: $\dot{\omega} = dd^c\dot{\phi}$. Această condiţie este echivalentă cu $\nabla^- d\,scal_g = 0$, care înseamnă că 1-forma $d\,scal_g$ este J-invariantă, sau, echivalent, câmpul vectorial dual, care este gradientul curburii scalare, invariază structura

[69] Această formulă este demonstrată în [G02], unde se arată, de asemenea, că operatorul $\delta\delta\nabla^- d$ este un operator diferenţial de ordin 4, autoadjunct, semipozitiv, care acţionează pe funcţii reale.

complexă J: $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}\, scal_g} J = 0$, adică $scal_g$ este potenţial de olomorfie (*cf.* Definiţia 2.11). $\square$

Prezentăm în continuare unul dintre exemplele de metrici Kähler extremale de curbură scalară neconstantă construite de Calabi pe F_1.

Prima suprafaţă Hirzebruch[70] F_1 poate fi definită printr-o scufundare în $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1$:

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1 \,|\, x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0\},$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $y = (y_1, y_2)$ sunt sisteme de coodonate omogene pe $\mathbb{C}P^2$ şi $\mathbb{C}P^1$. Considerând restricţia la F_1 a proiecţiei pe al doilea factor, pe care o notăm p, $(F_1, p, \mathbb{C}P^1)$ este un fibrat în drepte proiective, trivial pe deschişii U_i definiţi de condiţia $y_i \neq 0$, iar funcţia de tranziţie $f_{12} \colon U_1 \cap U_2 \to PGL(2, \mathbb{C})$ este definită de aplicaţia proiectivă:

$$f_{12}(y)(u_1, u_2) = (\frac{y_2}{y_1} u_1, u_2),$$

ceea ce ne arată că acest fibrat este completatul proiectiv[71] al fibratului vectorial $(\hat{\mathbb{C}}^2, p, \mathbb{C}P^1)$, obţinând astfel o definiţie geometrică a lui F_1, ca spaţiu total al acestui fibrat.

Suprafaţa complexă F_1 poate fi obţinută şi din fibratul tautologic peste $\mathbb{C}P^1$ prin compactificarea fiecărei fibre adăugându-i punctul de la infinit. Deoarece fibratul tautologic se identifică în mod natural cu $\mathbb{C}^2$ fără un punct, F_1 poate fi văzută şi ca suprafaţa complexă obţinută din $\mathbb{C}P^2$ prin eclatarea acestui punct.

Fie S_0 secţiunea zero şi S_∞ secţiunea infinit a lui F_1. Ambele sunt curbe complexe izomorfe cu $\mathbb{C}P^1$ şi mulţimea deschisă $U \overset{not.}{=} F_1 - (S_0 \cup S_\infty)$ se identifică în mod natural cu $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$.

Metrica Kähler construită de Calabi are grupul de simetrie $U(2)$. Mai precis, este definită pe mulţimea deschisă U de un potenţial Kähler care depinde numai de norma uzuală pe $U = \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$.

Scriem potenţialul Kähler ca o funcţie reală u de t, unde e^t este pătratul normei uzuale din $\mathbb{C}^2$. Atunci forma Kähler este dată de:

$$\omega = \frac{1}{4} dd^c u,$$

iar metrica Kähler corespunzătoare, g, este descrisă în continuare.

Fiecare punct x din $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ determină o dreaptă complexă l_x şi cea ortogonală $l_x^\perp$ relativ la structura hermitiană obişnuită. Spaţiul tangent în x la $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ se descompune în suma directă: $l_x \oplus l_x^\perp$. Atunci, norma la pătrat indusă de metrica g pe l_x, respectiv $l_x^\perp$ este egală cu u'', respectiv u' şi l_x, $l_x^\perp$ sunt ortogonale în raport cu g. În particular, rezultă că primele două derivate ale funcţiei u trebuie să fie

[70] O prezentare detaliată a suprafeţelor Hirzebruch F_k este dată în [Be81], Exposé IV.

[71] *Completatul proiectiv* al unui fibrat vectorial E este fibratul în spaţii proiective asociat sumei Whitney dintre E şi fibratul trivial de rang 1.

pozitive pentru $-\infty < t < \infty$. Vrem să extindem această metrică pe S_0 şi S_∞. Observăm că metrica g se poate extinde la S_0 (respectiv la S_∞) dacă şi numai dacă $u'(t)$ şi $u''e^t$ (respectiv $u''e^{-t}$) au ambele limită strict pozitivă şi , în plus, metrica este C^∞ pentru $t = -\infty$ (respectiv $t = +\infty$) dacă şi numai dacă u' şi $u''e^t$ (respectiv $u''e^{-t}$) sunt C^∞.

Notăm limitele astfel: $\lim_{t\to-\infty} u'(t) = a$, $\lim_{t\to\infty} u'(t) = b$. Deoarece u'' este strict pozitivă rezultă că funcţia u' este monoton crescătoare, deci $a < b$. Un rezultat demonstrat în [Be81], Exposé IV, ne asigură că S_0 şi S_∞ formează o bază a lui $H^2(F_1, \mathbb{Z})$, deci a şi b determină clasa de coomologie a formei Kähler ω.

Pe mulţimea deschisă U, forma volum a metricii g, vol_g, este dată de:

$$vol_g = u'u''e^{-2t}vol_0, \tag{B.16}$$

unde vol_0 este forma volum a metricii plate (asociate potenţialului Kähler $u(t) = e^t$). Pentru orice funcţie w pe U care depinde numai de t are loc:

$$\operatorname{grad} w = \frac{2w'}{u''}X, \tag{B.17}$$

unde X este câmpul vectorial tautologic pe $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ care asociază fiecărui punct pe el însuşi, văzut ca vector tangent. Atunci:

$$\Delta w = -4\left(\frac{w'}{u'} + \frac{w''}{u''}\right).$$

Folosind (B.16) rezultă că forma Ricci este dată de:

$$\rho = \frac{1}{2}dd^c v, \tag{B.18}$$

unde v este următoarea funcţie:

$$v(t) = 2t - \log u'(t) - \log u''(t).$$

Astfel, din (B.18) rezultă următoarea formulă pentru curbura scalară:

$$scal = -\Delta v = 4\left(\frac{v'}{u'} + \frac{v''}{u''}\right).$$

Conform Propoziţiei B.2, metrica g este extremală dacă şi numai dacă câmpul vectorial $\operatorname{grad} scal$ este olomorf, *i.e.* $\mathcal{L}_{\operatorname{grad} scal} J = 0$. Deoarece X este olomorf pe U, rezultă din (B.17) că g este extremală dacă şi numai dacă funcţia $\frac{scal'}{u''}$ este constantă, sau, echivalent:

$$scal = \alpha\psi + \beta,$$

unde α şi β sunt constante reale şi $\psi \overset{not.}{=} u'$. Integrând de două ori ultima ecuaţie obţinem:

$$\psi\psi' = -\frac{1}{48}\alpha\psi^4 - \frac{1}{24}\beta\psi^3 - \frac{1}{4}\gamma\psi - \delta \overset{not.}{=} P(\psi),$$

unde γ şi δ sunt constante reale. Constantele sunt determinate de condiţiile asimptotice de mai sus, impuse astfel încât potenţialul Kähler să poată fi extins la S_0 şi S_∞. În funcţie de polinomul P, aceste condiţii sunt:

- $P(a) = 0$, $P(b) = 0$, $P(\psi) > 0$ pentru $a < \psi < b$,
- câtul $\frac{P(\psi)}{\psi - a}$ este egal cu a pentru $\psi = a$ şi $\frac{P(\psi)}{b-\psi}$ este egal cu b pentru $\psi = b$.

Obţinem în acest fel:

$$\psi\psi' = \frac{(\psi - a)(b - \psi)(2a\psi^2 + (b^2 - 2a^3b)\psi + 2a^2b)}{(b-a)(a^2 + b^2 + 4ab)},$$

deci există o unică metrică Kähler extremală cu grupul de simetrie $U(2)$ pe F_1 în fiecare clasă Kähler. Constantele α şi β sunt date de formulele următoare:

$$\alpha = \frac{96a}{(b-a)(a^2+b^2+4ab)}, \quad \beta = \frac{24(b^2 - 3a^2)}{(b-a)(a^2+b^2+4ab)}. \tag{B.19}$$

Se observă că metricile astfel obţinute nu pot avea curbura scalară constantă, deoarece $scal' = \alpha\psi'$, unde α, conform (B.19), este nenulă $(a > 0)$ şi $\psi' = u''$ este strict pozitivă pentru $-\infty < t < \infty$.

Bibliografie

[Ab98] M. Abreu, *Kähler geometry of toric varieties and extremal metrics*, Internat. J. Math. **9**(1998), 641–651.

[ACG03] V. Apostolov, D.M.J. Calderbank, P. Gauduchon, *The Geometry of Weakly Self-Dual Kähler Surfaces*, Compositio Math. **135**(2003), 279–322.

[ACG04] V. Apostolov, D.M.J. Calderbank, P. Gauduchon, *Hamiltonian* 2*-forms in Kähler geometry I*, preprint arXiv math.DG/0202280.

[AG02] V. Apostolov, P. Gauduchon, *Self-dual Einstein Hermitian* 4*-manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci(5) **1** (2002), 203–243.

[Be87] A.L. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Be81] A.L. Besse, *Géométrie riemannienne en dimension* 4, Sem. A. Besse 1978/79, Ed. Cedic, Paris, 1981.

[B1898] L. Bianchi, *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Mem.Soc.Della Sc., Serie Terza, Tomo **XI**(1898), p.267–352.

[Br00] R. Bryant, *Bochner-Kähler Metrics*, J. Amer. Math. Soc. **14**(2001), no. 3, 623–715

[Cal82] E. Calabi, *Extremal Kähler metrics*, Seminar on Differential Geometry, Princeton Univ. Press, 1982, 259–290.

[CP02] D.M.J. Calderbank, H. Pedersen, *Selfdual Einstein Metrics with Torus Symmetry*, J. Differential Geom. **60**(2002), 485–521.

[De83] A. Derdziński, *Selfdual Kähler Manifolds and Einstein Manifolds of Dimension Four*, Compositio Mathematica **49**(1983), 405–433.

[G02] P. Gauduchon, *Calabi's Extremal Kähler Metrics*, Note de curs, IMAR, 2002.

[Gui94] V. Guillemin, *Kähler structures on toric varieties*, J. Differential Geom. **40**(1994), 285–309.

[K33] E. Kähler, *Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik*, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **9**(1933), 173–186.

[KN63] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New-York, vol. I,II, 1963,1969.

[LB91] C.R. LeBrun, *Explicit self-dual metrics on* $\mathbb{C}P^2\sharp\cdots\sharp\mathbb{C}P^2$, J. Differential Geom. **34**(1991), 223–253.

[L57] A. Lichnérowicz: *Sur les transformations analytiques des variétes kählériennes*, C.R.Acad.Sci.Paris, **244**(1957), 3011–3014.

[M04] A. Moroianu, *Kähler Geometry*, preprint arXiv math.DG/0402223.

[MS02] A. Moroianu, U. Semmelmann, *Twistor Forms On Kähler Manifolds*, preprint arXiv math.DG/0204322.

[PS93] H. Pedersen, A. Swann, *Einstein-Weyl geometry, the Bach tensor and conformal scalar curvature*, J. reine angew. Math. **441**(1993), 99–113.

[US01] U. Semmelmann, *Conformal Killing forms on Riemannian manifolds, Habilitationsschrift*, preprint arXiv math.DG/0206117.

[Tod95] K.P. Tod, *Cohomogeneity-One Metrics with Self-Dual Weyl Tensor*, Twistor Theory (ed. S. Hugget), Marcel Dekker, New-York (1995), 171–184.